



Innledning

Dette dokumentet inneholder løsninger til alle oppgavene som er gitt i første runde i Abelkonkurransen fra og med 2005/2006 til og med 2024/2025.

Oppgavene er samlet i et separat dokument. Du finner sidetallet til hver oppgave i oppgavesamlingen i parentes i venstremargen nedenfor.

Innhold

Algebra – side 2

Geometri – side 19

Kombinatorikk og sannsynlighet – side 42

Tallteori – side 63



Algebra

- (2) **Oppgave 1 2005/2006.** En prosent av tallet er $144/40 = 3,6$, så hundre prosent er 360. **B**
- (2) **Oppgave 3 2005/2006.** $\sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$ **D**
- (2) **Oppgave 5 2005/2006.** $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$ **B**
- (2) **Oppgave 6 2005/2006.** La x være antall førsteklasinger. Da er $0,45x + 0,5(300 - x) = 144$, $x = 120$ **E**
- (2) **Oppgave 8 2005/2006.** Kall tallene x , y og z , der $x < y < z$. Da er $xy = 10$, $xz = 15$ og $yz = 24$. Så $y^2 = (xy)(yz)/(xz) = 10 \cdot 24/15 = 16$, slik at $y = 4$. **C**
- (2) **Oppgave 10 2005/2006.** Anta at $5x$ barn var ute og x inne før lunsj. Etter lunsj var det $5x + 3$ barn ute og $x - 3$ inne. Opplysningene fra oppgaven gir at $5x + 3 = 8(x - 3)$, slik at $x = 9$. Tilsammen var det $x + 5x = 54$ barn i barnehagen. **D**
- (3) **Oppgave 12 2005/2006.** For å få ned 7 hamburgere, bruker han $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ minutter, som han greier innen de 240 minuttene konkurransen varer. For å få ned 8 hamburgere, ville han imidlertid ha brukt $127 + 128 = 255$ minutter. **A**
- (3) **Oppgave 13 2005/2006.** La $A = 100x + 10y + z$, der x , y og z er hele tall, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$. Da er $100x + 10y + z = 6(10x + z)$, slik at $40x + 10y - 5z = 0$, det vil si $8x + 2y = z$. Fordi $z \leq 9$, er $x = 1$, og fordi $x = 1$ og $z \leq 9$, er $y = 0$, slik at $z = 8$. Summen av sifrene er 9. **B**
- (3) **Oppgave 16 2005/2006.** $2(a^2 - b^2)^2 = 2((a - b)(a + b))^2 = 2(a - b)^2(a + b)^2$, så fra opplysning gitt i oppgaven er $(a + b)^4 = 2(a - b)^2(a + b)^2$, slik at $(a + b)^2 = 2(a - b)^2$, som gir $a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 - 4ab + 2b^2$, altså $a^2 + b^2 = 6ab$. Fordi $a^2 + b^2 = 30$, er $ab = 5$ **A**
- (3) **Oppgave 17 2005/2006.** $5/4 < \sqrt{2}$ fordi $(5/4)^2 = 25/16 < 2 = (\sqrt{2})^2$, og $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$ fordi $(\sqrt{2})^4 = 4 < 5 = (\sqrt[4]{5})^4$. Videre er $\sqrt[5]{5}$ opplagt mindre enn $\sqrt[4]{5}$, og gjennomsnittet $(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{4})/2$ av disse to er også mindre enn $\sqrt[4]{5}$ **C**



- (3) **Oppgave 4 2006/2007.** Likningene gir $a = \frac{2}{5}b$ og $c = \frac{2}{5}d$, der b og d er positive tall, slik at $b + d \neq 0$. Så $\frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{2}{5}b + \frac{2}{5}d}{b+d} = \frac{\frac{2}{5}(b+d)}{b+d} = \frac{2}{5}$ C
- (3) **Oppgave 7 2006/2007.** $1/x = x + 2$ gir $1/x^2 = 1 + 2/x = 1 + 2 \cdot 1/x = 1 + 2(x + 2) = 2x + 5$ B
- (4) **Oppgave 10 2006/2007.** La s være lengden av rullefortauet, v Olas fart og v_0 rullefortauets fart (målt i sekunder pr. lengdeenhet). Da er $s = 6(v + v_0)$ og $s = 24(v - v_0)$. Fire ganger første likning minus andre likning gir $3s = 48v_0$, slik at Ola når han står stille bruker $s/v_0 = 48/3 = 16$ sekunder. C
- (4) **Oppgave 17 2006/2007.** La b være Berits alder da Anna var $4b$ år. Annas alder er nå $5b$ år, og Berit er også blitt b år eldre, slik at hun er $2b$ år. Om 6 år er Anna $5b+6$ år og Berit $2b+6$ år, og $5b+6 = 2(2b+6)$ gir $b = 6$, og $5b+2b = 42$ D
- (4) **Oppgave 19 2006/2007.** La de fire tallene være a, b, c og d . Da er $178 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2 + (b+c)^2 + (b+d)^2 + (c+d)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (a+b+c+d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 100$. Den siste likheten følger av at vi i summen $2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 30$ teller hvert av de fire tallene 3 ganger, slik at $a + b + c + d = 30/3 = 10$. (Eventuelt kan vi innse at $a + b + c + d$ er summen av de to minste og de to største tallene, altså $2 + 8 = 10$.) Dermed er $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (178 - 100)/2 = 39$.
- Alternativ:* La de fire tallene være a, b, c og d , der $a \leq b \leq c \leq d$. Da er $a+b = 2$ og $a+c = 3$, og $b+c = 4$ (da er $a+d = 6$) eller $b+c = 6$ (da er $a+d = 4$). Summen av de to første likningene er $2a + b + c = 5$, og kombinert med hver av alternativene for $b+c$, gir dette $2a + 4 = 5$ eller $2a + 6 = 5$, slik at $a = 1/2$ eller $a = -1/2$. Dette gir henholdsvis $b = 3/2$ og $c = 5/2$, eller $b = 5/2$ og $c = 7/2$. På samme måte er $c+d = 8$ og $b+d = 7$, som gir $2d + b + c = 15$. I tilfellet $b+c = 4$ gir dette $d = 11/2$, og i tilfellet $b+c = 6$ gir dette $d = 9/2$. I begge tilfellene er $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 39$ D
- (4) **Oppgave 1 2007/2008.** $1997 \cdot 2003 - 1993 \cdot 2007 = (2000 - 3)(2000 + 3) - (2000 - 7) \cdot (2000 + 7) = 2000^2 - 3^2 - 2000^2 + 7^2 = 40$ C
- (4) **Oppgave 4 2007/2008.** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \left((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = x^{1/8} = \sqrt[8]{x}$ C



- (4) **Oppgave 5 2007/2008.** Ved å faktorisere nevnerne $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11$ og $24 = 4 \cdot 6$, ser vi at teller er delelig på disse. Nevneren 23, derimot, er et primtall som ikke forekommer som primfaktor i teller. **D**
- (5) **Oppgave 12 2007/2008.** Når Cecilie har løpt 100 m, har Arne løpt 96 m og Beate 98 m. De er altså alle 4 m fra målstreken. Cecilie løper de siste 4 metrene fortest, Beate nest fortest og Arne saktest. **B**
- (5) **Oppgave 13 2007/2008.** La R være radien i den største og r radien i den minste sirkelen. Da er $\pi = \pi R^2 - \pi r^2$, slik at $1 = R^2 - r^2 = (R + r)(R - r)$. Innsetting av $R + r = 2$ gir $1 = 2(R - r)$, og innsetting av $r = 2 - R$ gir $1 = 2(R - 2 + R)$, og $R = 5/4$ **B**
- (5) **Oppgave 16 2007/2008.** Siste siffer i a_{n+1} er siste siffer av produktet av siste siffer i a_n og siste siffer i a_{n-1} . Sistesifrene i $a_1, a_2, \dots$ følger dermed mønsteret 1, 2, 2, 4, 8, 2, 6, 2, 2, 4, 8, 2, 6, ..., og sifrene gjentar seg i en periode på 6. Fordi $2007 = 6 \cdot 334 + 3$, har a_{2007} samme sistesiffer som a_3 , altså 2. **B**
- (5) **Oppgave 17 2007/2008.** Adderer vi likningene, får vi $6a = 8c$, så $a > c$. Subtraherer vi den andre likningen fra den første, får vi $2a + 2b = 2d$, altså $a + b = d$. Så $d > a > c$ og $d > b$ **D**
- (5) **Oppgave 1 2008/2009.** Hvis Per spiser x pannekaker, spiser Pål $2x$ og Kari $4x$ pannekaker – til sammen $7x = 21$, og $x = 3$. Så Per spiser 3 pannekaker og Pål 6 – til sammen 9. **B**
- (6) **Oppgave 6 2008/2009.** Per sykler $15 \text{ m/s} \cdot 50 \text{ s} = 750 \text{ m}$ på de 50 sekundene. Pål sykler 200 m kortere, så han sykler $550 \text{ m}/50 \text{ s} = 11 \text{ m/s}$ **E**
- (6) **Oppgave 7 2008/2009.** La én banan og to epler koste x kr, og la én pære koste p kr. Opplysningene i oppgaven gir at $2x + 3p = 70$ og $3x + p = 63$. Så $7x = 3(3x + p) - (2x + 3p) = 3 \cdot 63 - 70$, og $x = 3 \cdot 9 - 10 = 17$ **D**
- (6) **Oppgave 9 2008/2009.** La L være den opprinnelige lønnen og $P = p/100$. Da blir lønnen etter lønnskuttet $(1 - P)L$, og etter lønnsøkningen $(1 + P)(1 - P)L$, som skal være lik $0,96L$. Altså er $(1 - P^2)L = 0,96L$, $P^2 = 0,04$, $P = 0,2$ og $p = 20$ **D**



- (6) **Oppgave 14 2008/2009.** Fordi a, b, c og d er heltall, gjelder $a + b + c \leq 47$, $b + c - d \geq 21$ og $a + c + d \geq 37$. Da er $a + b + 2c = (b + c - d) + (a + c + d) \geq 21 + 37 = 58$, og $c = (a + b + 2c) - (a + b + c) \geq 58 - 47 = 11$. Så $c \geq 11$. Og 11 er en mulig verdi for c – ulikhetene er oppfylt hvis $(a, b, c, d) = (26, 10, 11, 0)$.
..... C
- (6) **Oppgave 17 2008/2009.** $(x + 1)(x + y) = x^2 + xy + x + y = 143 = 11 \cdot 13$, så $x + 1 = 11$ og $x + y = 13$, altså $x = 10$ og $y = 3$.
..... B
- (6) **Oppgave 3 2009/2010.** Antall hjul ville ha vært 200 hvis alle kjøretøyene var mopeder. Vi har $356 - 200 = 156$ ekstra par hjul, altså er det $156/2 = 78$ biler. Forholdet mellom antall biler og antall mopeder er $78/(100 - 78) = 39/11$. D
- (7) **Oppgave 5 2009/2010.** Summen av guttenes alder er $12 \cdot 10,5 = 126$ og summen av alle barnas alder $30 \cdot 11 = 330$. Summen av jentenes alder er dermed $330 - 126 = 204$, som gir et gjennomsnitt på $204/18 = 11\frac{1}{3}$.
..... D
- (7) **Oppgave 8 2009/2010.** 9 kaker er tre fjerdedeler av dem som verken har sjokolade eller nøtter, så 12 har verken sjokolade eller nøtter. Disse 12 er to tredjedeler av dem som ikke har sjokolade, så 18 har ikke sjokolade. Dette er halvparten av alle, så hun baker 36 kaker.
..... C
- (7) **Oppgave 13 2009/2010.** Første tall er $\sqrt{6^3} = ((2 \cdot 3)^3)^{1/2} = (2 \cdot 3)^{3/2} = 2^{3/2} \cdot 3^{3/2}$, neste tall er $2^{3/2} \cdot 3^{3/2}$, så $2^{1/2} \cdot 3^{1/3}$, så $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = (2^3)^{1/2} \cdot (3^3)^{1/2} = 2^{3/2} \cdot 3^{3/2}$, og til slutt $\sqrt[6]{72} = (2^3 \cdot 3^2)^{1/6} = 2^{1/2} \cdot 3^{1/3}$. Det er to forskjellige tall (det ene er mindre enn det andre, da begge eksponentene er mindre).
..... B
- (7) **Oppgave 19 2009/2010.** Ved første kvadratsetning er $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$, og likningen fra oppgaven kan skrives $(x + 1/x)^2 + (x + 1/x) - 6 = 0$. Denne andregradslikningen gir $x + 1/x = -3$ (fordi x er negativ, kan ikke $x + 1/x$ være lik den andre løsningen, 2). Første kvadratsetning gir $x^4 + 1/x^4 = (x^2 + 1/x^2)^2 - 2 = ((x + 1/x)^2 - 2)^2 - 2 = ((-3)^2 - 2)^2 - 2 = 47$.
..... C
- (7) **Oppgave 1 2010/2011.** Alle tallene er mindre enn $1/2$, unntatt $1/(3/2) = 2/3$.
..... D
- (7) **Oppgave 4 2010/2011.** $16 \cdot 2^{16} = 16 \cdot (2^4)^4 = 16 \cdot 16^4 = 16^5$.
..... C



- (8) **Oppgave 7 2010/2011.** På de første 4 kilometrene bruker Astrid $\frac{4}{15} h = \frac{16}{60} h = 16 \text{ min}$. Hun må da bruke $25 \text{ min} - 16 \text{ min} = 9 \text{ min} = \frac{9}{60} h = \frac{3}{20} h$ på de siste 2 kilometrene – altså holde en gjennomsnittsfart på $2/(\frac{3}{20}) \text{ km/h} = 13\frac{1}{3} \text{ km/h}$ **B**

- (8) **Oppgave 10 2010/2011.** Vi har $a/c = (a/b)(b/c) = 2 \cdot 5 = 10$. Dermed får vi $(a^2 + b^2 + c^2)/(ac) = a/c + b^2/(ac) + c/a = a/c + (b/c)/(a/b) + 1/(a/c) = 10 + 5/2 + 1/10 = 12,6$ **E**

- (8) **Oppgave 20 2010/2011.** La a, b, c, d og e være antall sopper henholdsvis Anne, Bjørn, Celine, Dag og Erik plukker. Da sier opplysningene i oppgaven at $a + b = c + d$, $b + d > a + c$, $a + c > d + e$ og $e + c > d + a$. Likningen og første ulikhet kan skrives som $d - a = b - c > -(d - a)$, og dermed er $d - a > 0$ (hvis $x > -x$, er $x > 0$), slik at $b > c$ og $d > a$. Ved å sette sammen første og andre ulikhet, får vi også $b > e$. Så b eller d er størst (eller b og d er like store). Addisjon av likningen og siste ulikhet, sammen med $b > e$, gir $2b > b + e > 2d$, slik at $b > d$ **B**

- (8) **Oppgave 4 2011/2012.** Det er x selgere som i løpet av uka har skrevet $5x$ rapporter. På den annen side har selgerne og lederen mottatt i alt $\frac{3}{2}x + 420$ rapporter, slik at $5x = \frac{3}{2}x + 420$. Dermed er $x = 120$ **C**

- (8) **Oppgave 8 2011/2012.** Vi setter opp regnestykket der x_0, x_1, x_2 og x_3 er sifrene i a :

$$\begin{array}{rcccc} & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ + & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline = & 6 & 9 & 8 & 5 \end{array}$$

Fra første kolonne ser vi at $x_0 + x_3$ er 5 eller 6, mens siste kolonne gir at summen er 5 eller 15, så $x_0 + x_3 = 5$. Det være mente fra både andre og tredje kolonne, så $x_2 + x_1 = 18$. Altså er $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 18 + 5 = 23$ **D**

- (9) **Oppgave 11 2011/2012.** Vi ser at $1000x - x = 126$. Altså $x = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$. Denne brøken kan vi ikke forkorte mer, så x kan ikke skrives på formen $x = p/q$ med q mindre enn 111. **B**



- (9) **Oppgave 14 2011/2012.** Vi finner $E^2 - A^2 = (\pi - 3)^2/4 > 0$, så $E > A$ siden begge er positive. Videre er $A - B = (\pi - 3)/6 > 0$, så $A > B$. Og så er $A^2 - C^2 = (\pi - 3)^2/4 > 0$, så $A > C$. Endelig er $1/D^2 - 1/C^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{3})^2 > 0$, så $C > D$. (Ulikhetene $D < C < A < E$ er spesialtilfeller av kjente ulikheter mellom harmonisk, geometrisk, aritmetisk og kvadratisk middelvei – her mellom tallene π og 3.) **E**
- (9) **Oppgave 16 2011/2012.** Fordi $(a/b) \cdot (b/c) \cdot (c/a) = 1$, må $(a/b, b/c, c/a)$ være ett av de fire triplene $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$. Alle de fire mulighetene oppstår ved å velge $a = 1$, $b = \pm 1$ og $c = \pm 1$ **C**
- (9) **Oppgave 1 2012/2013.** $3^6 \cdot 9^{12} = (3^2)^3 \cdot 9^{12} = 9^3 \cdot 9^{12} = 9^{3+12} = 9^{15}$ **B**
- (9) **Oppgave 5 2012/2013.** Skriv L , K og S for alderen til Lars, Kari og Stian i år. De gitte opplysningene kan skrives $L = 2K$, $S = 3K$ og $S - 5 = 2(L - 5) = 2L - 10$. Om vi setter inn L og S fra de to første opplysningene i den tredje får vi $3K - 5 = 4K - 10$, som har løsning $K = 5$. Summen av aldrene er $K + 2K + 3K = 6K = 30$ år. **A**
- (10) **Oppgave 9 2012/2013.** Blant $A = 0,3$, $C = 0,333\dots$ og $D = 0,25$ er $C = 1/3$ størst. I tillegg er $E = 240/723 < 240/720 = 1/3 = C$, og til slutt er $C^2 = 1/9 = 0,111\dots > B^2$, så $C > B$. C er altså størst. **C**
- (10) **Oppgave 11 2012/2013.** De positive tresifrede tallene er 100, 101, ..., 999. Middelveien av 100 og 999 er $\frac{1}{2}(100 + 999) = 549,5$. Det samme gjelder middelveien av 101 og 998, middelveien av 102 og 997 og så videre. Så middelveien av alle tallene er 549,5. **B**
- (10) **Oppgave 15 2012/2013.** På den ene siden er

$$\begin{aligned} m &> 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \overbrace{8 \cdot \dots \cdot 8}^{8 \text{ ganger}} \cdot \overbrace{16 \cdot \dots \cdot 16}^{16 \text{ ganger}} \cdot 32 \\ &= 2^2 \cdot 4^4 \cdot 8^8 \cdot 16^{16} \cdot 32 = 2^{2+2 \cdot 4+3 \cdot 8+4 \cdot 16+5} = 2^{103} > 2^{100}, \end{aligned}$$

og på den andre siden er

$$\begin{aligned} m &< 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \overbrace{16 \cdot \dots \cdot 16}^{8 \text{ ganger}} \cdot \overbrace{32 \cdot \dots \cdot 32}^{16 \text{ ganger}} \\ &= 2 \cdot 4^2 \cdot 8^4 \cdot 16^8 \cdot 32^{16} = 2^{1+2 \cdot 2+3 \cdot 4+4 \cdot 8+5 \cdot 16} = 2^{129} < 2^{130}. \end{aligned}$$

..... **D**



- (10) **Oppgave 20 2012/2013.** En løsning er $x = 0$. Andre løsninger må oppfylle $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2010} + x^{2011} = 0$. Etter at to og to ledd slås sammen blir dette $(1 + x) + (1 + x)x^2 + (1 + x)x^4 + \dots + (1 + x)x^{2010} = 0$. Dette viser at også $x = -1$ er en løsning. For å sjekke om det finnes enda flere løsninger kan vi dividere med $1 + x$, og få $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2010} = 0$. Men denne ligningen har ingen reelle løsninger, fordi alle leddene er positive. **B**
- (10) **Oppgave 2 2013/2014.** La P og U være alderen til Petter og Ulrik nå. Opplysningene gir $P - 2 = 3(U - 2) = 3U - 6$ og $P + 2 = 2(U + 2) = 2U + 4$, som vi kan skrive om til $P = 3U - 4$ og $P = 2U + 2$. Dermed er $3U - 4 = 2U + 2$, med løsning $U = 6$. Så $P = 2 \cdot 6 + 2 = 14$, og $U + P = 20$ **B**
- (10) **Oppgave 3 2013/2014.** Summen av de tre ligningene er $4(x + y + z) = 1$, så $x + y + z = \frac{1}{4}$ **D**
- (11) **Oppgave 6 2013/2014.** Hvis en av de tre har fem biler, kan hver av de to andre ha høyst to biler hver, slik at de alle har ni biler til sammen. Med fordelingen 4, 3, 3 kan de ha ti biler til sammen. De kan ikke ha flere enn ti biler, for hvis ingen har flere enn fire biler og totalen er minst elleve, må minst to av dem ha fire biler, men da vil de to ha flere enn sju biler til sammen. Så det høyeste antallet biler de tre kan ha er ti. **C**
- (11) **Oppgave 9 2013/2014.** $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1}$ **B**
- (11) **Oppgave 12 2013/2014.** π^2 er størst: Først er alltid $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 < a^2$, så $3,13 \cdot 3,15 < 3,14^2 < \pi^2$. Videre er $\pi^2 > 3,14^2 > 9,85$, og $\sqrt{9,61}\pi = 3,1 \cdot \pi < \pi^2$. Til slutt er $3,15 > \pi$, så $\pi^3/3,15 < \pi^3/\pi = \pi^2$ **D**
- (11) **Oppgave 17 2013/2014.** En løsning er $x = 0$. Dersom $x \neq 0$ kan vi dividere med x^2 og få $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$. Setter vi $u = x^2$, gir dette en andregradsligning $2u^2 + 3u - 2 = 0$, med løsninger $u = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$, altså $u = -2$ eller $u = \frac{1}{2}$. Siden $u = x^2$ må $u > 0$, så bare $u = \frac{1}{2}$ er relevant. Den gir de to løsningene $x = \pm\sqrt{1/2}$. I alt tre løsninger. **C**
- (11) **Oppgave 1 2014/2015.** $\frac{0,08}{0,64} = \frac{1}{8} \neq 0,8$ **E**
- (11) **Oppgave 3 2014/2015.** Johanne har $18/15 \cdot 40 = 48$ blå blyanter. **D**



- (12) **Oppgave 5 2014/2015.** Kari må ikke bruke mer enn $1/8$ time på de ti kilometrene. Hun brukte $1/10$ time på de første ni kilometrene, så på den siste kilometeren kan hun ikke bruke mer enn $1/8 - 1/10 = 1/40$ time, som svarer til en gjennomsnittsfart på 40 km/h. **D**
- (12) **Oppgave 8 2014/2015.** Hvis en ny gutt starter vil det være 14 gutter og 7 jenter, så i utgangspunktet er det 13 gutter og 7 jenter i klassen. Produktet av de to antallene er 91. **C**
- (12) **Oppgave 13 2014/2015.** $a^b = 2$ gir $a^{-3b} = (a^b)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$, så $3a^b + 8a^{-3b} = 6 + 1 = 7$ **B**
- (12) **Oppgave 16 2014/2015.** Om de to sidelengdene er a og b , er $a + b = 4$ og $a^3 + b^3 = 25$. Identiteten $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ gir $a^2 - ab + b^2 = \frac{25}{4}$. Samtidig er $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = 16$, og en kombinasjon av disse to gir $3(a^2 + b^2) = 2 \cdot \frac{25}{4} + 16$. Summen av de to overflatene er da $6(a^2 + b^2) = 25 + 32 = 57$ **C**
- (12) **Oppgave 1 2015/2016.** Summen av de tre oppgitte beløpene er 250 kr. I den summen er alles penger regnet med to ganger, så summen må deles med 2. **B**
- (13) **Oppgave 5 2015/2016.** Identiteten $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ gir $2016^4 - 2015^4 = (2016^2 - 2015^2)(2016^2 + 2015^2) = (2016 - 2015)(2016 + 2015)(2016^2 + 2015^2) = 4031(2016^2 + 2015^2)$ **B**
- (13) **Oppgave 9 2015/2016.** Skriv a og b for Annes og Berits nåværende alder. Det er $a - b$ år siden Anne var b år. Den gangen var Berit $b - (a - b) = 2b - a$ år. Altså er $a = 3(2b - a)$, det vil si $4a = 6b$, som vi forkorter til $2a = 3b$. Vi har også fått oppgitt at $a + b = 60$, så $3a + 3b = 180$. Det vil si $3a + 2a = 180$, så $a = 180/5 = 36$ **E**
- (13) **Oppgave 13 2015/2016.** Først er $A = (2015 - 1)(2015 + 1) = 2015^2 - 1^2 < E$.
Så er $E = (2000 + 15)^2 = 2000^2 + 15^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 15 > C$.
Videre er $D = ((45 - 3,5)(45 + 3,5))^2 = (45^2 - (\frac{7}{2})^2)^2 = (2025 - \frac{49}{4})^2 < 2015^2 = E$.
Til slutt er $B = 1970 \cdot 2060 + 2060 = (2015 - 45)(2015 + 45) + 2060 = (2015)^2 - 45^2 + 2060 = (2015^2) + 35 > E$ **B**



- (13) **Oppgave 20 2015/2016.** For hvert positivt heltall k er

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Summert fra $k = 2016$ til $k = 4030$ gir dette

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2015} - \frac{1}{4030} = \frac{1}{4030},$$

så $x > 4030$ E

- (13) **Oppgave 1 2016/2017.** For fire av tallene vil noen få desimaler avgjøre rekkefølgen: $A = 0,1314\dots$, $B = 0,15$ (oppgitt), $D = 0,1333\dots$, og $E = 0,125$. E er den minste av disse. I tillegg er $E < C$, fordi $E^2 = (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$ og $C^2 = \frac{1}{50}$ E

- (13) **Oppgave 10 2016/2017.** Legg først merke til at $11 \cdot 13 < 12^2$. Det gir $D^2 = \frac{1}{4}(11 + 13 + 2\sqrt{11 \cdot 13}) < \frac{1}{4}(24 + 2 \cdot 12) = 12 = B^2$. Videre er $C^2 = \frac{49}{4} > \frac{48}{4} = 12 = B^2$, og $A^2 = \pi^2 < 3,2^2 = 10,24 < 11$ gir $A < \sqrt{11} < D$. Samlet til nå har vi $A < D < B < C$. Den som kjenner ulikheten mellom aritmetisk og harmonisk middel, vet at $E < D$. Det kan en også se slik, etter å sette brøkene i $1/E$ på fellesnevner:

$$\frac{D}{E} = \frac{(\sqrt{11} + \sqrt{13})^2}{4\sqrt{11 \cdot 13}} = \frac{11 + 2\sqrt{11 \cdot 13} + 13}{4\sqrt{11 \cdot 13}} = \frac{1}{2} + \frac{24}{4\sqrt{11 \cdot 13}} > \frac{1}{2} + \frac{24}{4 \cdot 12} = 1.$$

Altså må D stå i midten. D

- (14) **Oppgave 13 2016/2017.** n er $\frac{1}{6}$ pluss en sum av fem tall som alle er mindre enn $\frac{1}{6}$. Derfor er $n < 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$, så $n^2 < n < 1/n < 1/n^2$ B

- (14) **Oppgave 15 2016/2017.** Om det ukjente uttrykket kalles x , må $x = \sqrt{6+x}$. Kvadrér ligningen og flytt over x : $x(x-1) = 6$. Denne ligningen har løsninger $x = 3$ og $x = -2$. Den negative løsningen må forkastes fordi x er en kvadratrott. D

- (14) **Oppgave 16 2016/2017.** Produktet P har 4032 faktorer, symmetrisk plassert om 0 (for hver faktor a er også $-a$ en faktor). Det er 2016 negative faktorer, så produktet er positivt. Dermed blir $P = Q^2$, der $Q = x(x-1) \cdots (x-2015)$. Så er $2^{2016}Q = 4031 \cdot 4029 \cdot 4027 \cdots 3 \cdot 1$. Multipliser med $4030 \cdot 4028 \cdots 2 = 2^{2015} \cdot 2015!$, med resultat $2^{2016} \cdot 2^{2015} \cdot 2015! \cdot Q = 4031!$, så $Q = 4031!/(2^{4031} \cdot 2015!)$. .. E



- (14) **Oppgave 2 2017/2018.** Ved ankomsten i Trondheim er klokken i San Fransisco 2 om morgenen. Magnus reiste derfra 21 timer tidligere, som var 5 om morgenen dagen før. **C**
- (14) **Oppgave 5 2017/2018.** Summen av de fem likningene er $2(a+b+c+d+e) = 20$, som gir $a + b + c + d + e = 10$ **A**
- (15) **Oppgave 6 2017/2018.** Om vi øker hvert av tallene a, b, c, d, e med 1, vil alle ligningene fortsatt holde, men summen øker med 5. **E**
- (15) **Oppgave 11 2017/2018.** For hvert heltall $n > 1$ er $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$. Derfor er 1 det minste av tallene, så det ser vi bort fra. Vi finner $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{6}$ og $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, så $\sqrt[3]{3}$ er størst. **C**
- (15) **Oppgave 13 2017/2018.** En slik følge er gitt ved et utvalg på ti tall av de tolv tallene 1, 2, ..., 12, og antall slike utvalg er $\binom{12}{10} = 12 \cdot 11/2! = 66$ **C**
- (15) **Oppgave 15 2017/2018.** For enkelhets skyld kan vi bruke én runde på banen som lengdeenhet, og den tiden Mona bruker på denne runden som tidsenhet. Da endres avstanden mellom Mona og fluen med fart 4 når fluen flyr i motsatt retning, og 2 når den flyr i samme retning som Mona løper. I det første tilfellet bruker den dermed tiden $1/4$ fra den forlater Mona til den treffer henne igjen, og i det andre tilfellet bruker den tiden $1/2$. Tilsammen bruker den da tid $3/4$ før den treffer Mona to ganger. Den tiende gangen har den brukt tid $5 \cdot 3/4 = 15/4$, og det er også det antall runder Mona har løpt. **E**
- (15) **Oppgave 17 2017/2018.** Dersom ett av tallene på tavlen er $a = 10m + k$ med $0 \leq k \leq 9$, så blir det neste tallet $b = m + 10$. Dersom $m > 40$, det vil si $a \geq 410$, blir $8b = 8m + 80 < 10m \leq a$. Det følger at hvis de første 670 tallene i rekken er ≥ 410 , så er det 671. tallet mindre enn $2^{2017}/8^{670} = 2^{2017-3 \cdot 670} = 2^7 = 128 < 410$. Etter et tall < 410 kommer et tall < 51 , og deretter et tall < 16 , og etter det kommer tallet 11 (for det er klart at alle tallene på tavlen er større enn 10).
- Eksakt regning viser at tallrekken inneholder 608 tall større enn 11. Den ender slik: 15048789, 1504888, 150498, 15059, 1515, 161, 26, 12, 11, 11, 11, **C**
- (16) **Oppgave 4 2018/2019.** $2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$ **C**
- (16) **Oppgave 5 2018/2019.** Den gitte ligningen kan skrives $2^{x-4}(2^5 + 1 - 2^3) = 5^2$, det vil si $2^{x-4} \cdot 25 = 25$. Løsningen krever $2^{x-4} = 1$, altså $x = 4$ **E**



- (16) **Oppgave 10 2018/2019.** Du legger 2^{n-1} flere erter i glass nummer n enn i glass nummer $n-1$. Det betyr at glass nummer n skal ha $1+2+2^2+\dots+2^{n-1} = 2^n - 1$ erter (sum av geometrisk rekke). **E**
- (16) **Oppgave 16 2018/2019.** Fordi $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$, er $x^2 + 1/x^2$ et heltall dersom $x + 1/x$ er heltall. Så vi trenger bare sjekke $x + 1/x$. Ligningen $x + 1/x = n$ er ekvivalent med $x^2 - nx + 1 = 0$, med løsning $x = n/2 \pm \sqrt{n^2/4 - 1}$. For $n = 2$ finnes én løsning, mens for $n > 2$ er det to løsninger, med produkt lik 1. Skriv x_+ for den største løsningen. Fordi $x_+ + 1/x_+ = n$ og $1/x_+ < 1$, er $n - 1 < x_+ < n$, så $x_+ < 5$ når $n \leq 5$, og $x_+ > 5$ når $n \geq 6$. Det finnes altså to løsninger for hver av $n = 3, 4$ og 5 i tillegg til den ene for $n = 2$, i alt 7 løsninger. **D**
- (16) **Oppgave 19 2018/2019.** Grafen til f er en linje gjennom $(0, b)$ og $(d, 0)$, mens grafen til g er en linje gjennom $(0, d)$ og $(b, 0)$. Om du spiller de to første punktene gjennom linjen $y = x$, får du de to andre punktene (i motsatt rekkefølge). Dermed er de to linjene også speilbilder av hverandre gjennom linjen $x = y$ **D**
- (17) **Oppgave 4 2019/2020.** Nils gjør unna den første halvdelen på en time, og den andre halvdelen på en halvtime. Til sammen har han da brukt en og en halv time på turen, med gjennomsnittshastighet $90 \text{ km}/\frac{3}{2} \text{ h} = 60 \text{ km/h}$ **A**
- (17) **Oppgave 9 2019/2020.** Tallene a, ab og $\sqrt{a}/\sqrt{a+b}$ er alle mindre enn 1, men på den andre siden så er $2a/(a+b) > 1$, så det tallet er størst. **C**
- (17) **Oppgave 13 2019/2020.**

$$\underbrace{\frac{1}{abcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cdea} + \frac{1}{deab}}_{\dots = 8} + \frac{1}{eabc} = \frac{a+b+c+d+e}{abcde} = \frac{5 \cdot 2}{1} = 10.$$

Dermed er $1/eabc = 2$, altså $eabc = 1/2$ **D**

- (17) **Oppgave 16 2019/2020.** Om vi multipliserer de to ligningene med hverandre, får vi $(x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = 26 \cdot 106$. Når vi forenkler dette, står vi tilbake med $x^4 + 4y^4 = 26 \cdot 106 = 2756$ **C**



- (17) **Oppgave 18 2019/2020.** Den oppgitte formelen $f(2) = 2$ gir $2a + b = -2$. Påstand A blir ekvivalent med $2 > a+b+1$, som ikke følger fra forutsetningen, fordi $a + b$ kan ha hvilken som helst verdi. Påstand E er $a + b + 1 > 0$, som heller ikke følger, av samme grunn. Påstand B kan skrives $2a + 2b + 2 = 2 + b$, ekvivalent $2a + b = 0$, som strider mot forutsetningen. Påstand C sier $b = 0$, som heller ikke følger. Det gjenstår å sjekke påstand D. Fordi $f(x) = (x + \frac{a}{2})^2 + b - (\frac{a}{2})^2$, gjelder at $f(x_1) = f(x_2)$ hvis og bare hvis $x_1 = x_2$ eller $x_1 + x_2 = -a$ (parabelen er symmetrisk om den vertikale linjen gjennom bunnpunktet, dvs $x = -a/2$). Så påstand D sier at $f(1) = 1$ eller $f(1) + 1 = -a$. Den første av disse gir $a + b = 0$, som ikke følger. Den andre gir $a + b + 2 = -a$, det vil si $2a + b = -2$, som var utgangspunktet. D
- (18) **Oppgave 1 2020/2021.** $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, og alle de andre tallene er større enn $\frac{1}{2}$ D
- (18) **Oppgave 2 2020/2021.** $\sqrt{2^x} = 2^{x/2}$, og $x = 2^{100}$ gir $x/2 = 2^{99}$ C
- (18) **Oppgave 3 2020/2021.** Summen av de tre oppgitte prisene blir prisen for to epler, to bananer og to appelsiner. Så én av hver frukt koster $(11+13+12)/2 = 18$ E
- (18) **Oppgave 4 2020/2021.** 30 % av suvenirene er fra Argentina, og 18 % er fra Chile. Det er tilsammen 48 %. Resten må være fra Bahamas. Det blir 52 %. D
- (18) **Oppgave 15 2020/2021.** Uttrykkene A, B og C forenkles alle til D, mens E = $10 + \frac{11}{2}\sqrt{2}$ (etter at teller og nevner multipliseres med $2 - \sqrt{2}$). E
- (18) **Oppgave 7 2021/2022.** Først er $B > \sqrt{16} = D > E$. Videre er $B^6 = 17^3 < 18^3 = 8 \cdot 9^3 < 9^4 = C^6$, så $C > B$. Til sist er $A^3 = 80 < 81 = C^3$, så $C > A$ C



- (19) **Oppgave 9 2021/2022.** Vi regner ut nevneren i de forskjellige brøkene nedenfra:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1, \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{\frac{1}{5} + 1} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1,\end{aligned}$$

og så videre. Her er det et mønster: Nevneren på formen $\frac{1}{n} + \frac{1}{\dots}$ får verdien 1 når n er et oddetall, men verdien $\frac{n+1}{n}$ når n er et partall. Siden 2020 er et partall, ender vi opp med $\frac{2021}{2020}$ **D**

- (19) **Oppgave 10 2021/2022.** Alle unntatt **D** kan være feil. Moteksempler: **A** $x = 0,05$ og $y = 0,1$; **B** $x = 1$ og $y = 2$; **C** $x = -2$ og $y = -1$, og **E** $x = -1$ og $y = 1$. Men **D** holder alltid, fordi $y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2)$ og $y^2 + xy + x^2 > |y|^2 - 2|x| \cdot |y| + |x|^2 = (|y| - |x|)^2 \geq 0$ **D**

- (19) **Oppgave 11 2021/2022.** Når $n \neq 0$, vil ikke ℓ_n og ℓ_{-n} skjære hverandre, siden ligningene for de to linjene blir

$$n^4 y + \frac{x}{n^2 + 1} \pm n = 0,$$

så de blir parallelle, og har ingen felles punkter. Linjen ℓ_0 har ligning $x = 0$, og den skjærer ℓ_n i punktet $(0, y)$ der $y = -1/n^3$ **B**

- (19) **Oppgave 17 2021/2022.** Fordi $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$, er $4^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (-9)$, altså $x^2 + y^2 + z^2 = 34$. Videre er

$$\begin{aligned}x(xy + yz + xz) &= xyz + x^2(x + y + z) - x^3 \\ y(xy + yz + xz) &= xyz + y^2(x + y + z) - y^3 \\ z(xy + yz + xz) &= xyz + z^2(x + y + z) - z^3,\end{aligned}$$

og summen av de tre ligningene gir

$$(x + y + z)(xy + yz + xz) = 3xyz + (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) - (x^3 + y^3 + z^3),$$

altså $-36 = -36 + 34 \cdot 4 - (x^3 + y^3 + z^3)$, med andre ord $x^3 + y^3 + z^3 = 136$. Til sist får vi da

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{34}{136} = \frac{1}{4}.$$



Alternativ løsning: I dette tilfellet gjør de oppgitte tallene at vi kan komme litt raskere frem. Ligningen vi utledet ovenfor, kan skrives

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

Setter vi inn de oppgitte tallene, får vi

$$x^3 + y^3 + z^3 = -36 + 4(x^2 + y^2 + z^2 + 9) = 4(x^2 + y^2 + z^2),$$

og svaret på oppgaven gir seg selv. **A**

(20) **Oppgave 2 2022/2023.** $\frac{a\sqrt{ab^4}}{(\sqrt{ab})^3} = \frac{ab^2\sqrt{a}}{ab\sqrt{ab}} = \frac{b}{\sqrt{b}} = \sqrt{b}$ **C**

(20) **Oppgave 3 2022/2023.** Siden $4^3 = 64$ og $5^3 = 125$, er $4 < \sqrt[3]{100} < 5$. Videre er $(4\frac{1}{2})^3 = \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8} < 100$, så korrekt avrundet svar er 5. **C**

(20) **Oppgave 6 2022/2023.** Ligningene har løsning for $a = 0$ ($x = \pm 1$, $y = -x$), $a = 1$ ($x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = 1 - x = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{3}$) og $a = -1$ ($x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = -1 - x = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{3}$). Det finnes ingen løsninger for $|a| \geq 2$, for da følger av $x + y = a$ at $|x| > 1$ eller $|y| > 1$, eller muligens $|x| = |y| = 1$, og ingen av disse er forenlig med $x^2 + y^2 = 1$. Det er i alt tre muligheter for a .

Man kan se dette enkelt geometrisk, siden den første ligningen beskriver en sirkel med sentrum i origo og radius 1, mens den andre ligningen beskriver en rett linje med avstand $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$ fra origo.

Enda en løsningsmetode er å sette inn $y = x - a$ fra den andre ligningen i den første og rydde litt, med resultat $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. Det er en annengradslikning med diskriminant $8 - 4a^2$ (etter forenkling), som har reelle løsninger kun for $|a| \leq \sqrt{2}$ **D**

(20) **Oppgave 8 2022/2023.** Fordi $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ og $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ (multipliser hver ligning med nevneren på venstre side), blir det gitte uttrykket lik

$$\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 3)}{\sqrt{2} - 1} = 3.$$

..... **B**

(20) **Oppgave 9 2022/2023.** Vi har $3^{a-1} = 3^a/3 = 2$ og $2^{2b-1} = 4^b/2 = 3$, så $3^{(a-1)(2b-1)} = 2^{2b-1} = 3$, og dermed $(a-1)(2b-1) = 1$ **A**



- (20) **Oppgave 2 2023/2024.** Forutsetningene i oppgaven endres ikke dersom vi bytter om x og y , så hverken **A** eller **C** kan være rett. Det kan heller ikke **B**, for da måtte $2x^2 = 5$ og $x^2 = 1$. Valget står nå mellom de to siste alternativene. Setter vi inn $y = 1/x$ i $x^2 + y^2 = 5$ og rydder litt, får vi $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. Det gir $x^2 = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$, som gir mulige positive løsninger for x^2 og dermed for x . (Hvis $x^2 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$, blir $y^2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})$, og omvendt.) En mer geometrisk løsning benytter at punktet (x, y) skal ligge i et skjæringspunkt mellom sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ og hyperbelen $xy = 1$ **D**

- (21) **Oppgave 13 2023/2024.** Vi kvadrerer det gitte uttrykket og får

$$\begin{aligned} \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - \pi}}{2} + \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - \pi}}{2} + 2\sqrt{\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - \pi}}{2} \cdot \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - \pi}}{2}} \\ = \pi + \sqrt{\pi^2 - (\pi^2 - \pi)} = \pi + \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

..... **E**

- (21) **Oppgave 15 2023/2024.** Det letteste først: $D > E$, for eksempel fordi $(\sqrt[3]{2})^{12} = 2^4 = 16$ mens $(\sqrt[4]{2})^{12} = 2^3 = 8 < 16$. For å sammenligne uttrykkene **A–D** regner vi ut de inverse slik: For **A** bruker vi $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ med $x = \sqrt{4}$ og $y = \sqrt{3}$, og får $1/A = \sqrt{4} + \sqrt{3}$, mens samme metode med $x = \sqrt{3}$ og $y = \sqrt{2}$ gir $1/B = \sqrt{3} + \sqrt{2} < 1/A$. For **C** bruker vi $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ med $x = \sqrt[3]{3}$ og $y = \sqrt[3]{2}$, så $1/C = 3^{2/3} + 3^{1/3} \cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}$. Tilsvarende er $1/D = 2^{2/3} + 2^{1/3} + 1 < 1/C$, så $D > C$. Det gjenstår å sammenligne **B** og **D**. Men fordi $2^{2/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$ og $2^{1/3} + 1 > 2 > \sqrt{3}$, er $1/D > 1/B$, så $B > D$. **B**

- (21) **Oppgave 16 2023/2024.** Det gitte uttrykket kan skrives som et produkt av 2024 faktorer, der hver er en brøk $(n! + (n + 1)!)/n!$ med $n = 0, 1, \dots, 2023$. Men $(n + 1)! = n!(n + 1)$, så brøken forenkles til $n + 2$. Vi står altså igjen med $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 = 2025!$ **D**



- (21) **Oppgave 17 2023/2024.** Vi setter $a_n = b_n - \frac{7}{4}$ (fordi $a_n = a_{n-1}$ presis når $a_{n-1} = -\frac{7}{4}$). Det gir $b_n - \frac{7}{4} = 5(b_{n-1} - \frac{7}{4}) + 7$, som forenkles til $b_n = 5b_{n-1}$. Dermed er $b_{2023} = 5^{2022}b_1 = 5^{2022} \cdot \frac{99}{4}$ og $a_{2023} = b_{2023} - \frac{7}{4} = 5^{2022} \cdot \frac{99}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(5^{2022} \cdot 99 - 7)$. Setter vi inn $99 = 100 - 1 = 5^2 \cdot 4 - 1$, får vi $a_{2023} = 5^{2024} - \frac{1}{4}(5^{2022} + 7)$. Når vi skal finne de siste k sifrene av et produkt, er det nok å regne med de siste k sifrene av hver faktor. Så vi kan finne de siste fire sifrene av potenser av 5: De blir 5, 25, 125, 625, 3125, 5625, 8125, 0625, og dermed gjentas de siste fire i følgen i det uendelige. Det vil si at de siste fire sifrene av 5^{4i} er 0625 for alle positive heltall k . Spesielt gjelder det 5^{2024} , mens de siste fire sifrene i 5^{2022} blir 5625. Så $5^{2022} + 7$ ender på 5632, og de siste to sifrene i $\frac{1}{4}(5^{2022} + 7)$ blir 08 (fordi $5632/4 = 1408$). Så $5^{2024} - \frac{1}{4}(5^{2022} + 7)$ ender på $25 - 8 = 17$, og det nest siste sifret er altså 1.

Alternativ løsning for de som kjenner til moduloregning: Først regner vi modulo 5, og ser at $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ for $n \geq 2$. Det gir $a_n = 5x_n + 2$ for heltall n , slik at $5x_n + 2 = 5(5x_{n-1} + 2) + 7$ for $n > 2$, altså $x_n = 5x_{n-1} + 3$, og dermed $a_n = 5(5x_{n-1} + 3) + 2$, som gir $a_n \equiv 17 \pmod{25}$.

Deretter regner vi modulo 4, og finner $a_n \equiv a_{n-1} - 1 \pmod{4}$. Dermed $a_{2023} \equiv a_1 - 2022 \equiv 3 - 2 \equiv 1 \pmod{4}$. Siden $a_{2023} \equiv 17 \pmod{25}$, og 25 og 4 er innbyrdes primiske, og $25 \cdot 4 = 100$, må $a_{2023} \equiv 17 \pmod{100}$. (Dette følger av det kinesiske restleddteoremet.) Det vil si at a_{2023} ender på 17 når vi skriver det i titallsystemet.

Alternativ løsning: Vi trenger bare holde styr på de to siste sifrene i a_n . For $n = 1, 2, \dots$ finner vi at disse er 23, 22, 17, 92, 64, 17, ..., og de siste fire her vil så gjentas i det uendelige. Det betyr at de to siste sifrene i a_{4k+3} er 17 for alle positive heltall k . Med $k = 505$ får vi så at a_{2023} ender på 17. A

- (21) **Oppgave 1 2024/2025.** $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})/\frac{1}{6} = \frac{3+2}{6} \cdot 6 = 5$ E

- (21) **Oppgave 4 2024/2025.** $\sqrt{2^{16}} = 2^8 = 256$, fordi $(2^8)^2 = 2^{8 \cdot 2} = 2^{16}$ E

- (22) **Oppgave 5 2024/2025.** La oss kvadrere noen av tallene: $A^2 = \frac{1}{8}$, $C^2 = \frac{1}{10}$, $D^2 = \frac{1}{16}$, $E^2 = \frac{1}{9}$. Av disse har A^2 den minste nevneren, så den er størst. Videre er $B = 0,33 < E = 0,3333... < A$, så A er størst av alle. A

- (22) **Oppgave 13 2024/2025.** Det følger av antagelsene at $a + c = b + d = 1$, så produktet det spørres etter er bare $(a + b)(b + c)(c + d)$. Men vi har også $ac = bd = 0$, så $(a + b)(b + c)(c + d) = (ad + bc)(b + c) = b^2c + bc^2 = 2bc$, ettersom også $b^2 = b$ og $c^2 = c$. Om vi velger $a = d = 0$ og $b = c = 1$, ser vi at ingen av alternativene A, B, C eller D holder. E



- (22) **Oppgave 17 2024/2025.** Ingen av de fire første alternativene er alltid rett. Her er moteksempler: **A:** $x = y = \frac{1}{2}$ ville gitt $0 + 0 = 1$. **B:** Det blir likhet dersom x og y begge er heltall. **C:** $x = \frac{1}{2}$ og $y = 2$ ville gitt $0 \cdot 2 = 1$. **D:** $x = y = -\frac{3}{2}$ ville gitt $(-2) \cdot (-2) \leq 2$ **E**

- (22) **Oppgave 18 2024/2025.** Skriv opp summen slik, og legg merke til at n 'te rad kan skrives $n \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9)$:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \\ &+ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \\ &+ 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ &+ \dots \\ &+ 9 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \\ &= (1 + 2 + \dots + 9) \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025. \end{aligned}$$

..... **B**

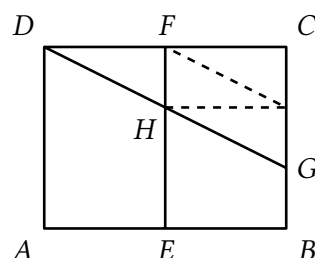


Geometri

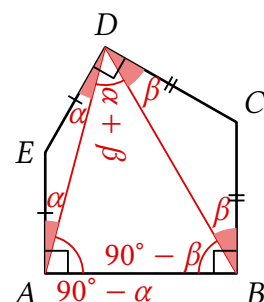
- (23) **Oppgave 2 2005/2006.** Summen av lengdene av de vannrette linjestykkene er 20. Det samme gjelder de loddrette linjestykkene. **B**

- (23) **Oppgave 7 2005/2006.** La sidene ha lengder x og y . Da er arealet $xy = 14$, og ved Pytagoras' setning er $x^2 + y^2 = 36$, slik at $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 36 + 2 \cdot 14 = 64$, og $x + y = 8$. Omkretsen er $2(x + y) = 2 \cdot 8 = 16$ **C**

- (23) **Oppgave 9 2005/2006.** $HGCF$ kan deles opp i tre trekanten som er kongruente med trekanten HFD (se til venstre). Firkanten $EBGH$ er like stor som firkanten $HGCF$, så arealet av halve rektangelet $ABCD$ er seks ganger arealet av trekanten HFD . Arealet av hele rektanglet er 12 ganger så stort. **A**



- (23) **Oppgave 11 2005/2006.** La α og β være størrelsen til henholdsvis vinkelen EDA og BDC . Da er vinklene BAD og DBA henholdsvis $90^\circ - \alpha$ og $90^\circ - \beta$ (trekantene ADE og DBC er likebeinte). Vinkelsummen i trekanten ABD er 180° , så vinkelen ADB er lik $\alpha + \beta$. Fordi vinkelen EDC er rett, er $90^\circ = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 2(\alpha + \beta)$, og $\alpha + \beta = 45^\circ$ **C**



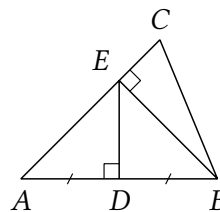
- (24) **Oppgave 14 2005/2006.** Ved Pytagoras' setning har CE lengde $\sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5$. Lengden av ED er dermed 0,5. Fordi trekantene BCE og EDF er formlike, med FE svarende til EB og ED svarende til BC , har FE lengde $2,5 \cdot 0,5 / 2 = 0,625$ **B**

- (24) **Oppgave 18 2005/2006.** La r være radius i halvsirkelen der hypotenusen er diameter. Ved Pytagoras' setning er $(2r)^2 = 10^2 + 7^2 = 149$, slik at $r^2 = 149/4$, og arealet av halvsirkelen er $\frac{1}{2}\pi r^2 = 149\pi/8$. Trekanten har areal $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 = 35$, og arealet av det av halvsirkelen som ligger utenfor trekanten er $149\pi/8 - 35$. Trekker vi dette fra arealet av de to halvsirklene der katetene er diametre, får vi $49\pi/8 + 100\pi/8 - 149\pi/8 + 35 = 35$ **D**

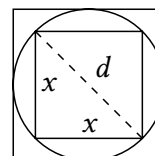
- (24) **Oppgave 2 2006/2007.** Lengden av periferien er π^2 og lengden av diameteren 2π . Til sammen $\pi^2 + 2\pi$ **E**



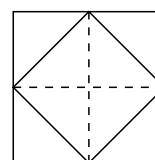
- (24) **Oppgave 5 2006/2007.** De to trekantene ADE og BDE er kongruente, da begge er rettvinklede og katetene har parvis samme lengde. Vinklene BAE og ABE er like store og AEB rett. Summen av dem er 180° , og vinkelen BAE er 45° **B**



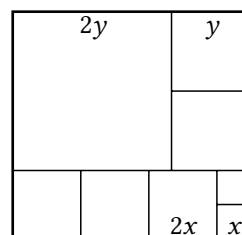
- (24) **Oppgave 8 2006/2007.** Hvis sirkelen har diameter d , så har det største kvadratet sidelengde d og det minste sidelengde x bestemt ved at $2x^2 = d^2$ (Pytagoras' setning). Forholdet mellom arealene er $d^2/x^2 = 2d^2/2x^2 = 2d^2/d^2 = 2$.



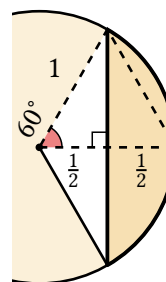
Alternativ: Drei det minste kvadratet 45° om sentrum, og se på arealet av de åtte trekantene på figuren. **C**



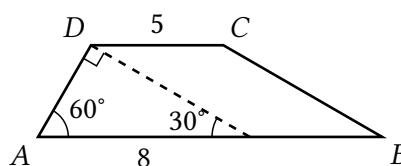
- (25) **Oppgave 11 2006/2007.** La kvadratsidene ha lengder x , $2x$, y og $2y$, som vist på figuren. Ved å sammenlikne nedre og øvre vannrette side i rektanglet, får vi $7x = 3y$, mens de loddrette sidene har lengde $2x + 2y$. Forholdet mellom vannrette og loddrette sider er $7x/(2x + 2y) = 7x/(2x + 2 \cdot 7x/3) = 21/20$ **A**



- (25) **Oppgave 12 2006/2007.** Vi skal finne arealet av det mørkeste området på figuren ved å trekke arealet av det hvite området fra arealet av sirkelsektoren som består av det hvite og det mørkeste området. Den markerte vinkelen er 60° , fordi den øvre hvite rettvinklede trekanten har en katet som er halvparten av hypotenusen. Dette er velkjent, men kan ses ved å sette sammen trekanten med dens speiling langs den andre kateten, slik at en likesidet trekant framkommer (stiplet). Arealet av sirkelsektoren er $120\pi/360 = \pi/3$, mens arealet av den hvite trekanten er $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}/4$ **C**

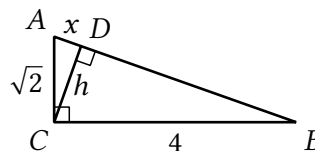


- (25) **Oppgave 14 2006/2007.** Parallellforskyv BC slik at C kommer på D . Da dannes en trekant med vinklene 30° , 60° og 90° og med hypotenus av lengde $13 - 5 = 8$. Den korteste kateten, AD , har halvparten av lengden av hypotenusen, ved et liknende resonnement som i oppgave 12 (sett sammen trekanten med sin speiling langs den andre kateten, slik at en likesidet trekant framkommer). **E**

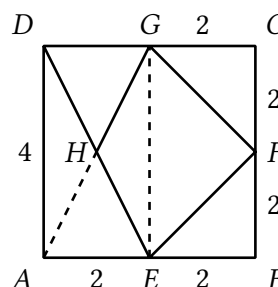




- (25) **Oppgave 18 2006/2007.** Lengden av AC er $\sqrt{2}$, da BC har lengde 4 og trekanten ABC har areal $2\sqrt{2}$. La AD ha lengde x og CD lengde h . Trekantene ABC og ACD er formlike, slik at $x/h = \sqrt{2}/4$, og dermed er $h^2 = 8x^2$. Etter Pytagoras' setning er $2 = x^2 + h^2 = 9x^2$, slik at $x = \sqrt{2}/3$ C

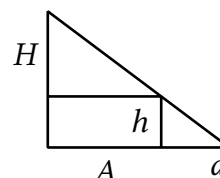


- (26) **Oppgave 7 2007/2008.** Vi skal addere lengdene av DE , EF , FG og GH . Ved Pytagoras' setning har DE lengde $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ og EF lengde $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. FG har samme lengde som EF , og GH er halvparten så lang som DE (diagonalene AG og DE i rektanglet $AEGD$ skjærer hverandre i H). Den totale lengden er $2\sqrt{5} + 2 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$ D

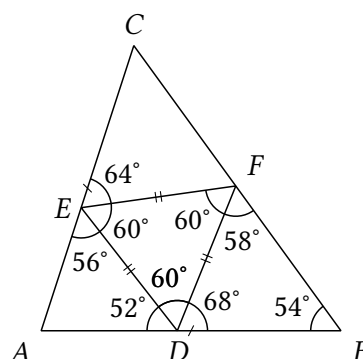


- (26) **Oppgave 9 2007/2008.** Omkretsen av det store rektanglet består av halvparten av omkretsene av de fire grå rektanglene, og har altså lengde $(6 + 11 + 12 + 13)/2 = 21$ A

- (26) **Oppgave 11 2007/2008.** Hvis Alf har høyde h , lykta er plassert H høyere og Alf står i avstand A fra lykta, så har skyggen lengde $a = (h/H)A$ (formlike trekanter). Hvis A tredobles, så tredobles også a D



- (26) **Oppgave 14 2007/2008.** Vinklene i trekanten DEF er alle 60° . Vinkelen AED er dermed $180^\circ - 64^\circ - 60^\circ = 56^\circ$. Summen av vinklene A , B og C er lik summen av vinklene A , EDA og AED (180°), og vinklene B og C er like, slik at vinkelen B er $(52^\circ + 56^\circ)/2 = 54^\circ$. Vinkelen BDF er $180^\circ - 60^\circ - 52^\circ = 68^\circ$. Dermed er vinkelen BFD $180^\circ - 54^\circ - 68^\circ = 58^\circ$ B



- (26) **Oppgave 20 2007/2008.** Oppdelingen av kvadratet danner en mengde vinkler med toppunkter i punktene. Vinkelsummen er $4 \cdot 90^\circ + 2007 \cdot 360^\circ$. Vi kan også finne vinkelsummen ved å summere vinkelsummen i alle de n trekantene, $n \cdot 180^\circ$. Så $180n = 4 \cdot 90 + 2007 \cdot 360$, som gir $n = 2 + 2 \cdot 2007 = 4016$ D

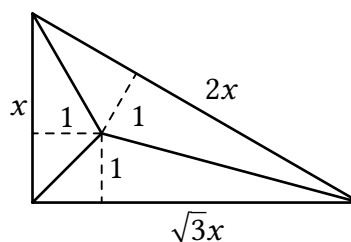


- (27) **Oppgave 3 2008/2009.** Summen av omkretsene av de tre ytre trekantene er lik summen av omkretsen av den store trekanten og omkretsen av den indre trekanten. $16 + 24 + 27 - 24 = 43$ A

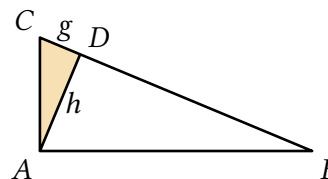
- (27) **Oppgave 5 2008/2009.** Trekantens høyde møter midten av grunnlinja, slik at høyden er $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, og trekantens areal er $2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$. Områdene som fjernes, er tre seksdels sirkler, hver med areal $\pi 1^2/6 = \pi/6$. Totalt fjernes $3\pi/6 = \pi/2$, og arealet av det gjenværende området er $\sqrt{3} - \pi/2$ A

- (27) **Oppgave 8 2008/2009.** La trekanten EBD ha grunnlinje g og høyde h . Trekantene FDC og EBD er formlike, så det fins et tall k (det lineære forholdstallet) som er slik at trekanten FDC har grunnlinje kg og høyde kh . Forholdet mellom arealene av FDC og EBD er $4/9 = kg \cdot kh/(gh) = k^2$, slik at $k = 2/3$. Grunnlinja i trekanten AEF er like lang som grunnlinja i FDC , og høyden den samme som høyden i EBD , og arealet er dermed $kg \cdot h/2 = k \cdot gh/2 = k \cdot 9 = 6$ C

- (27) **Oppgave 10 2008/2009.** La x være lengden av den korteste kateten. Da har hypotenusen lengde $2x$, og den lengste kateten har lengde $\sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$ ved Pytagoras' læresetning. Oppgaven sier at det fins et punkt som er slik at de tre normalene fra punktet til sidene alle har lengde 1. Dann tre trekanten ved å trekke linjestykker mellom hvert hjørne i trekanten til dette punktet. De tre normalene er høyder i disse trekantene. Summen av arealene av disse tre småtrekantene er $\sqrt{3}x/2 + x/2 + 2x/2 = (\sqrt{3} + 3)x/2$. Men summen av arealene er også lik arealet av den opprinnelige trekanten, $\sqrt{3}x \cdot x/2$. Så $(\sqrt{3} + 3)x/2 = \sqrt{3}x^2/2$, som gir $x = 1 + \sqrt{3}$. Arealet av den store trekanten er dermed $(\sqrt{3} + 3)(1 + \sqrt{3})/2 = 3 + 2\sqrt{3}$ A



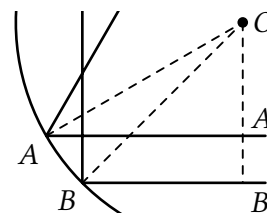
- (27) **Oppgave 11 2008/2009.** Ved Pytagoras' setning har AC lengde $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. La h være lengden av AD og g lengden av CD . Trekantene ABC og DAC er formlike, så $g/5 = 5/13$ og $h/5 = 12/13$. Arealet av trekanten ADC er $gh/2 = 1/2 \cdot 5 \cdot 5/13 \cdot 5 \cdot 12/13 = 750/169$ A





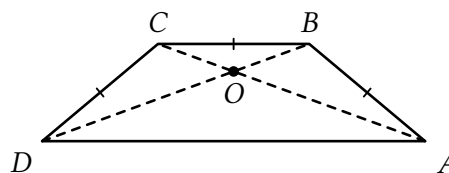
- (28) **Oppgave 4 2009/2010.** Arealet av det ene hvite området er differansen mellom arealet av et kvadrat med side 1 og en kvartsirkel med radius 1, altså $1 - \pi/4$. Arealet av det grå området er differansen mellom arealet av kvadratet og to ganger arealet av et hvitt område, $1 - 2(1 - \pi/4) = \pi/2 - 1$ **C**

- (28) **Oppgave 9 2009/2010.** La O være sentrum i sirkelen og A' og B' fotpunktene for normalene fra O til henholdsvis grunnlinja i trekanten og kvadratet. La A og B være nedre venstre hjørne i henholdsvis trekanten og kvadratet. Da er OA og OB radier i sirkelen og har lengder 1. Vinkelen AOA' er 60° (en vinkel med toppunkt i O og vinkelbein som går gjennom to av trekantens hjørner er 120°), og speiles trekanten $AA'O$ om AA' får vi en likesidet trekant, noe som viser at OA' har lengde halvparten av OA , altså $\frac{1}{2}$. Vinkelen BOB' er 45° (en vinkel med toppunkt i O og vinkelbein som går gjennom to nabohjørner i kvadratet er 90°), så trekanten $BB'O$ er likebeint. Av Pytagoras' læresetning følger det at to ganger kvadratet av katetenes lengde er $1^2 = 1$, slik at OB' har lengde $\sqrt{2}/2$. Avstanden mellom de to parallelle sidene er differansen mellom lengdene av OB' og OA' , altså $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ **B**



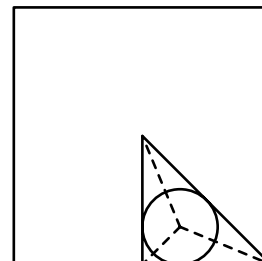
- (28) **Oppgave 12 2009/2010.** Kurva består av 6 halvsirkler og 3 kurver som er $5/6$ av en sirkel (en trekant der hjørnene er sentrene i tre like store sirkler som alle tangerer hverandre, er likesidet, og kantene går gjennom tangeringspunktene). Lengden er $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi + 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2\pi = 11\pi$ **D**

- (28) **Oppgave 14 2009/2010.** Fordi summen av vinklene A og D er mindre enn 90° , er begge disse vinklene spisse, og dermed er A entydig bestemt av lengden av AB og avstanden fra B til AD , mens D er entydig bestemt av lengden av DC og avstanden fra C til AD . Fordi AB og DC er like lange og B og C har samme avstand til AD , er vinklene A og D like store, 40° . Vinklene B og C er da 140° (supplementsvinklene er samsvarende vinkler med henholdsvis A og D). Trekantene ABC og DCB er likebeinte, slik at de andre vinklene i disse to trekantene er 20° . Det følger at vinklene OAD og ODA er 20° , slik at vinkelen AOD er 140° (vinkelsummen i trekanten er 180°). **D**

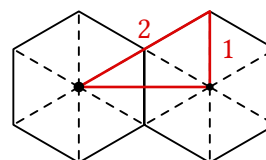




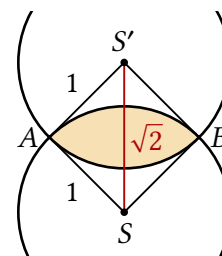
- (28) **Oppgave 17 2009/2010.** Del inn trekanten i tre trekanter, hver med to hjørner fra den opprinnelige trekanten og med sentrum i sirkelen som siste hjørne. Høydene til sentrum av sirkelen i de små trekantene er alle 1, da radien til tangeringspunktet er vinkelrett på tangeringslinja. La katetene ha lengde x (trekanten er likebeint). Da har hypotenusen lengde $\sqrt{2}x$ ved Pytagoras' læresetning. To ganger arealet av trekanten er lik summen av to ganger arealene av småtrekantene, slik at $x^2 = x + x + \sqrt{2}x$, og divisjon med x gir $x = 2 + \sqrt{2}$. Arealet av kvadratet er $(2x)^2 = (2(2 + \sqrt{2}))^2 = 4(4 + 4\sqrt{2} + 2) = 24 + 16\sqrt{2}$ C



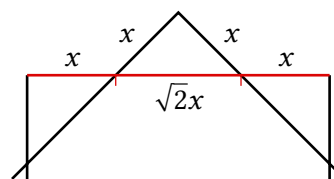
- (29) **Oppgave 3 2010/2011.** Hvis linjestykker trekkes fra sentrum til hvert hjørne, deles sekskantene inn i likesidede trekanter med sidelengde 1. Linjestykket som går mellom sentrene, og tre av sidene i trekantene, danner en rettvinklet trekant med hypotenus av lengde 2 og katet av lengde 1 (se figur). Pytagoras' setning gir avstand $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ mellom sentrene. E



- (29) **Oppgave 8 2010/2011.** La S og S' være sentrene i sirklene og A og B skjæringspunktene. Firkanten $ASBS'$ er en rombe med sidelengde 1, og fordi diagonalen SS' har lengde $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$, følger det av Pytagoras' setning at romben er et kvadrat (diagonalen ville ha vært kortere eller lengre hvis vinkelen A ikke hadde vært rett). Summen av arealene av kvartsirklene ASB og $AS'B$ er summen av arealet av hele kvadratet og arealet av området som ligger inni begge sirklene (sistnevnte areal blir regnet med to ganger). Så arealet av området som ligger inni begge sirklene, er differansen mellom summen av arealene av kvartsirklene og arealet av kvadratet, $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 - 1^2 = \frac{\pi}{2} - 1$ B

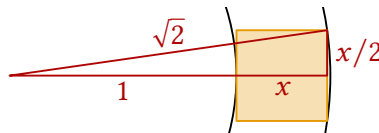


- (29) **Oppgave 9 2010/2011.** La de små rettvinklede, likebeinte trekantene som dannes, ha kateter av lengde x . Ved Pytagoras' setning har hypotenusen lengde $\sqrt{2}x$. Sidene i kvadratene deles inn i linjestykker som består av to kateter og en hypotenus, slik at $1 = 2x + \sqrt{2}x$, som gir $x = 1/(2 + \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})/(4 - 2) = 1 - \sqrt{2}/2$. Arealet av stjernen er arealet av et enhetskvadrat pluss arealet av fire trekanter, $1 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 1 + 2(1 - \sqrt{2}/2)^2 = 1 + 2(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}) = 4 - 2\sqrt{2}$ A

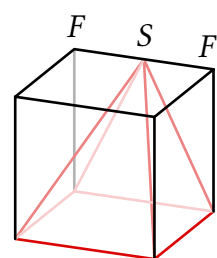




- (29) **Oppgave 17 2010/2011.** Sentrum i sirklene, det ene ytre hjørnet i kvadratet og midtpunktet på den ytre siden av kvadratet er hjørnene i en rettvinklet trekant. Hvis siden i kvadratet har lengde x , har katetene lengder $1 + x$ og $x/2$, mens hypotenusen har lengde $\sqrt{2}$. Pytagoras' setning gir $(1 + x)^2 + x^2/4 = 2$, eller $5x^2 + 8x - 4 = 0$, som har positiv løsning $x = 2/5$. Arealet av kvadratet er $x^2 = 4/25$ **B**



- (29) **Oppgave 19 2010/2011.** Pyramiden består av en bakre trekant, to sidetrekanter, en fremre trekant og en bunnflate. Den bakre trekanten har grunnlinje og høyde 1, og areal $1/2$. Side-trekanter har grunnlinje 1, og høyden er lengden av sidekanten i den bakre, likebeinte trekanten, $\sqrt{5}/2$ ved Pytagoras' setning, slik at arealet av de to sidetrekanter til sammen er $\sqrt{5}/2$. Den fremre trekanten har grunnlinje 1 og høyde lik lengden av en diagonal i en sideflate i kubens, $\sqrt{2}$, slik at arealet er $\sqrt{2}/2$. Den kvadratiske bunnflaten har areal 1. Summen av alle arealene er $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$ **B**



- (30) **Oppgave 3 2011/2012.** Siden $\angle BAE = 60^\circ$, er $\angle EAD = 30^\circ$. Trekanten DAE er likebent, og dermed $\angle ADE = \angle DEA = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$. Dermed er $\angle EDC = 90^\circ - \angle ADE = 15^\circ$ **C**

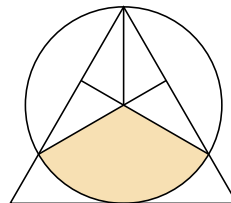
- (30) **Oppgave 7 2011/2012.** Om radien i den minste sirkelen er r så har den mellomstore sirkelen radius $\sqrt{2}r$. Diameteren i den største sirkelen er summen av diameterne i de to mindre, så det samme må gjelde radiene. Den største sirkelen har da radius $(1 + \sqrt{2})r$, så forholdet mellom arealet av den største og den minste sirkelen er $\pi((1 + \sqrt{2})r)^2 / (\pi r^2) = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ **E**

- (30) **Oppgave 12 2011/2012.** Start midt på den øverste linjen og følg linjen mot venstre. Hver gang du kommer til en av de markerte vinklene, snur du $180^\circ - x$ mot venstre, der x er størrelsen på de markerte vinklene. Fortsett til du er tilbake ved utgangspunktet. Da har du passert sju vinkler og dreid tre hele omdreininger mot venstre: $7 \cdot (180^\circ - x) = 3 \cdot 360^\circ$ gir $x = 180^\circ/7 = 25\frac{5}{7}^\circ$. . **E**

- (30) **Oppgave 17 2011/2012.** Omkretsen av planeten blir $2\pi \cdot 2/\pi \text{ km} = 4 \text{ km}$. For enkelhets skyld kan vi tenke oss at huset til den lille prinsen ligger ved nordpolen. Den første kilometeren tar ham til ekvator. Så følger han ekvator i tre kilometer, og går strake veien hjem, altså enda en kilometer. Totalt blir det 5 km. **D**

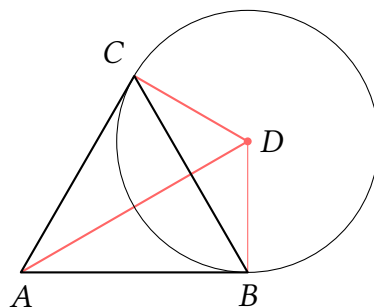


- (31) **Oppgave 19 2011/2012.** Den likesidede trekanten har høyde $\sqrt{3}$, så den får også areal lik $\sqrt{3}$. Sirkelradien blir $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Den markerte sirkelsektoren er en tredel av sirkelen, siden den tilhørende periferivinkelen er 60° . Den har derfor areal $\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{\pi}{4}$. I figuren finnes også fire kongruente småtrekanter med vinkler 30° , 60° og 90° og hypotenus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De to katetene i hver av dem får lengder $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ og $\frac{3}{4}$. Så arealene av de fire småtrekantene er tilsammen $2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Vi får arealet vi leter etter ved subtraksjon: $\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$ **A**



- (31) **Oppgave 2 2012/2013.** Skriv P , R og L for hjemmene til Per, Ragnar og Lars. De gitte opplysningene kan skrives $|PR| = 250$ m og $|RL| = 300$ m. Lengden av en side i en trekant er ikke større enn summen av de to andre lengdene, så $|PL| \leq |PR| + |RL| = 550$ m. Denne avstanden er mulig hvis de tre bor på rett linje med Ragnar mellom de to andre. I tillegg er $|RL| \leq |RP| + |PL|$, slik at $|PL| \geq |RL| - |RP| = 50$ m. Denne avstanden er også mulig om de bor på en rett linje, denne gangen med Lars mellom de to andre. Alle andre avstander mellom disse to yttergrensene kan oppnås ved å variere vinkelen PRL mellom 0° og 180° **C**

- (31) **Oppgave 7 2012/2013.** Om D er sentrum i sirkelen, så har trekanten ADC vinkler 30° , 60° og 90° . Sidekantene i en slik trekant har proporsjoner $1 : \sqrt{3} : 2$. Fordi $CD = 1$, er $AC = \sqrt{3}$ **B**



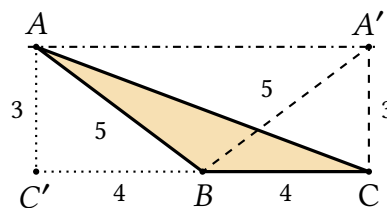
- (31) **Oppgave 10 2012/2013.** I figuren slik den er gitt i oppgaven er småtrekantene oppe til venstre og nede til høyre likebente, siden de har vinkler 45° , 45° og 90° . Dermed er hypotenusen i trekanten delt i tre like store deler, slik at sidekanten i kvadratet er $\sqrt{2}/3$, og arealet er $(\sqrt{2}/3)^2 = 2/9$ **A**

- (32) **Oppgave 13 2012/2013.** De to kvartsirklene må være like store. Skriv r for radien, målt i meter. A og B er endepunktene av hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter $2r$ og $2r+20$. Fra Pytagoras får vi $(2r)^2 + (2r+20)^2 = 10000$. Etter litt forenkling får vi $r^2 + 10r = 1200$. Her kan vi komplettere kvadratene og få $(r+5)^2 = 1225 = 35^2$. Siden r er positiv, må $r = 30$. Avstanden Karl Erik sykler, er $\pi r + 20 = 30\pi + 20$ meter. **B**



- (32) **Oppgave 16 2012/2013.** Trekantene ABC , AFE og CGE er alle likeformet, og lengden av hypotenusen i de tre står i forhold $1 : y : 1 - y$, hvor $y = x/(1+x)$. Dermed er forholdet mellom de tre arealene $1 : y^2 : (1-y)^2$. Trekanten ABC har areal $\frac{1}{2}$, så AFE og CGE har areal $\frac{1}{2}y^2$ og $\frac{1}{2}(1-y)^2$. Summen av de to arealene er $\frac{1}{2}(x^2/(1+x)^2 + 1/(1+x)^2)$ A

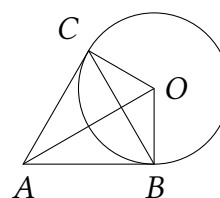
- (32) **Oppgave 18 2012/2013.** Høyden fra A må være 3, fordi grunnlinjen BC har lengde 4 og arealet er 6. Sammen med kravet $AB = 5$ gir dette to mulige plasseringer av A på linjen parallell med BC og avstand 3. Den ene kandidaten, A' i figuren, er utelukket fordi $CA > 3$, og fordi en trekant med sider 3, 4 og 5 er rettvinklet. Dermed må plasseringen bli i A som vist. CA blir hypotenus i en trekant med kateter $4 + 4 = 8$ og 3, så $CA = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$ D



- (33) **Oppgave 4 2013/2014.** Vi starter ytterst. Toppvinkelen i trekanten er 90° , siden den er periferivinkelen til en diameter. Dermed er de to andre vinklene i trekanten 45° . Så de to småtrekantene i høyre og venstre side er likebente, med kateter lik sidekanten i kvadratet, og dermed lik diameteren i den lille sirkelen. Den store sirkelen har 3 ganger så stor diameter som den lille, og dermed 9 ganger arealet. A

- (33) **Oppgave 7 2013/2014.** Alle banene har like lange langsider. De to halvsirklene i hver bane danner en sirkel med radius 1 m større enn banen innenfor, så omkretsen blir 2π m lengre. For bane fem er radien 4 m større enn for bane én, så banen blir 8π m lengre. D

- (33) **Oppgave 11 2013/2014.** La O være sentrum i den gitte sirkelen. Da er $\angle OCA = \angle OBA = 90^\circ$, fordi AB og AC er tangenter til sirkelen. Linjestykket AO deler $\angle CAB$ i to like deler, hver på 30° . Dermed er $|AO| = 2|OC| = 2$, og ved Pytagoras' setning er $|AC| = \sqrt{|AO|^2 - |OC|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

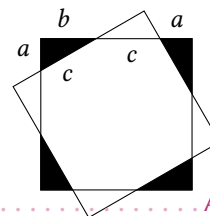


..... E



- (33) **Oppgave 14 2013/2014.** Om sidelengden i kubens er s , så er avstanden mellom motstående hjørner på en sideflate $s\sqrt{2}$, ved Pytagoras' teorem. Om vi skjærer kubens med et plan som inneholder to motstående sidekanter, får vi derfor et rektangel med sidekanter s og $s\sqrt{2}$. En ny anvendelse av Pytagoras viser at avstanden mellom to motstående hjørner i dette rektangelet er lik $\sqrt{s^2 + 2s^2} = \sqrt{3}s$. Dette må være lik diameteren i kulen, altså lik 2. Derfor er $s = 2/\sqrt{3}$. **B**

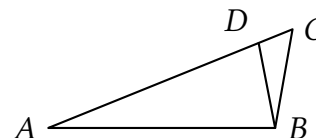
- (34) **Oppgave 18 2013/2014.** Alle de svarte og hvite trekantene i figuren er kongruente. Om sidene har lengde a , b og c som i figuren, ser vi at sidekanten i kvadratet blir $a + b + c$, så $a + b + c = 2$. Trekantene har vinkler 30° , 60° og 90° , så $b = \sqrt{3}a$ og $c = 2a$. Derfor er $a + \sqrt{3}a + 2a = 2$, så $a = 2/(3 + \sqrt{3}) = (1 - 1/\sqrt{3})$. Det totale arealet av de fire svarte trekantene er $4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2\sqrt{3}a^2 = 8/\sqrt{3} - 4$. **A**



- (34) **Oppgave 2 2014/2015.** Arealet av det røde området er $2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 12 = 6^3$, mens arealet av det blå området er $2 \cdot 22 + 2 \cdot 16 - 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6^2$, så forholdet mellom de to arealene er 3. **A**

- (34) **Oppgave 4 2014/2015.** Avstanden fra A til E kan regnes ut ved å addere de gitte avstandene med fortegn pluss eller minus på hver. Siden én avstand er et oddetall og de andre er partall, må summen uansett være et oddetall. Summen $3 - 6 + 8 - 4 = 1$ viser at 1 er en mulig avstand, og den må være den minste mulige. **B**

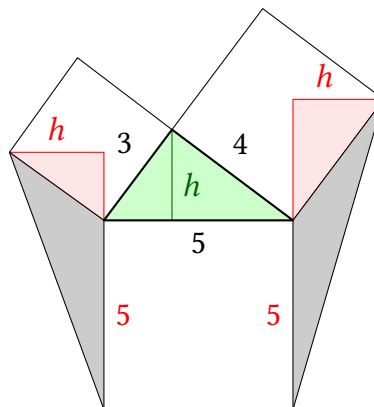
- (34) **Oppgave 7 2014/2015.** Trekanten BAD er likebent, så $\angle ABD = \angle BDA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = \frac{1}{2}(180^\circ - 22^\circ) = 79^\circ$. Dermed er $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 100^\circ - 79^\circ = 21^\circ$.



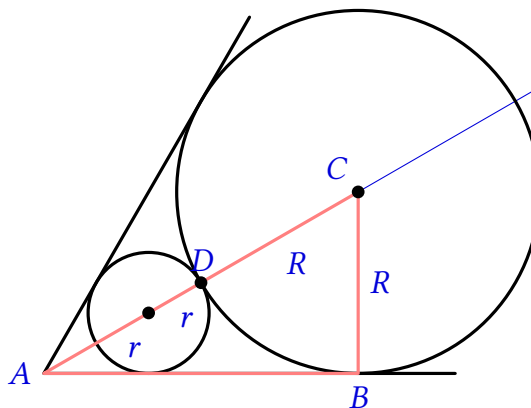
..... **A**



- (34) **Oppgave 9 2014/2015.** De to rettvinklede røde trekantene i figuren har hypotenus på en side av hvert sitt lille kvadrat, og kateter parallelle med sidene i det store kvadratet. Om de roteres 90° i hver sin retning om nederste hjørne, vil de til sammen fylle ut den grønne trekanten. Spesielt er de tre sidene merket h like lange, og $h = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Men h er også høyden til hver av de grå trekantene med grunnlinje 5, så det totale arealet av disse to trekantene er $h \cdot 5 = 12$.

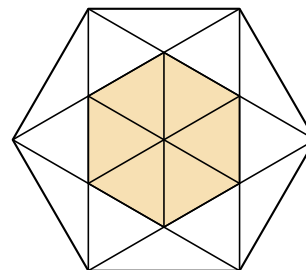


- (35) **Oppgave 17 2014/2015.** De to sirklene må ligge som vist i figuren. Trekanten ABC har vinkler 30° , 90° og 60° , så $AC = 2R$, og derfor $AD = R$. Det samme argumentet med den lille sirkelen leder til $AD = 3r$, så $R = 3r$. I oppgaven er enten $R = 5$ eller $r = 5$, så den andre sirkelen har radius enten $3 \cdot 5 = 15$ eller $5/3$.



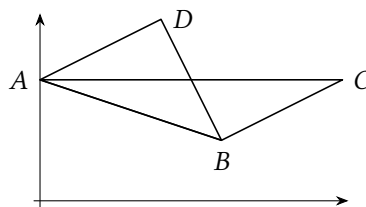
- (35) **Oppgave 2 2015/2016.** Det skyggelagte området er satt sammen av fire halvsirkler og fire kvartsirkler, alle med radius 1. Arealet blir $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = 3\pi$.

- (35) **Oppgave 6 2015/2016.** Trekk diagonalene til den indre sekskanten gjennom sentrum som vist. Nå er den ytre sekskanten delt i 18 småtrekanter, hvorav 6 utgjør den indre sekskanten. Tolv av småtrekantene er likesidete og like store. Hver av de gjenværende seks småtrekantene, langs sidene til den store sekskanten, har samme grunnlinje og høyde som de likesidete trekantene ved siden av. Derfor har alle småtrekantene samme areal, og forholdet mellom sekskantenes arealer er 3.



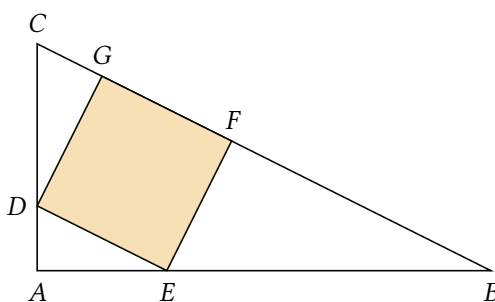


- (35) **Oppgave 10 2015/2016.** Legg til punktet $D = (4, 6)$, og noter at trekanten ADB er likebent og rettvisklet. ($AD^2 = BD^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, og $AB^2 = 6^2 + 2^2 = 40$. Bruk omvendingen av Pytagoras.) Derfor er $\angle ABD = 45^\circ$. Vinkelen $\angle CBD$ er også rett, så $\angle ABC = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

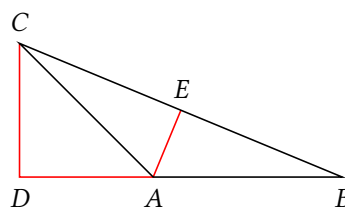


(Alternativt kan denne løses med cosinussetningen eller bruk av skalarproduktet.) C

- (35) **Oppgave 14 2015/2016.** I figuren finnes fire likeformedede trekanten ABC , FBE , GDC og AED , alle med sidekanter i forhold $1 : 2 : \sqrt{5}$. Om x står for sidekanten i kvadratet, blir $CG = \frac{1}{2}x$, $GF = x$ og $FB = 2x$, så $CB = \sqrt{5} = \frac{1}{2}x + x + 2x = \frac{7}{2}x$, og derfor $x = \frac{2}{7}\sqrt{5}$. Kvadratets areal blir $x^2 = \frac{20}{49}$ D



- (36) **Oppgave 18 2015/2016.** Dersom D er fotpunktet til normalen fra C til forlengelsen av AB , er $\angle DAC = 45^\circ$. Så trekanten DAC er likesidet. Pytagoras gir at $AD = CD = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, og en ny anvendelse av Pytagoras, denne gang på trekanten DBC , gir $BC^2 = CD^2 + DB^2 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)^2 = 2 + \sqrt{2}$. (Alternativt kan man finne BC^2 ved cosinussetningen.) Radien i sirkelen med sentrum i A og som tangerer BC er $r = AE$, der E er fotpunktet til normalen fra A til BC . E er midtpunktet på BC , så $BE^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Pytagoras på trekanten ABE gir nå $r^2 = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})$, og radien til sirkelen er $\pi r^2 = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2})$ C



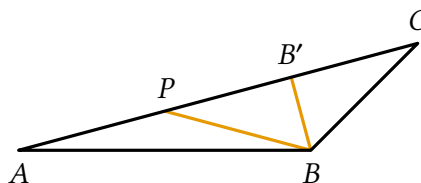
- (36) **Oppgave 4 2016/2017.** Om radiene i de to sylindrene heter r_1 og r_2 , og høydene heter h_1 og h_2 , så sier den første betingelsen at $r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2$. Vi kan tilfredsstille det andre kravet ved å sette $h_1 = r_2 = 1$. I så fall må vi ha $r_1^2 = h_2$, der r_1 kan velges fritt. Altså kan $h_2/r_1 = r_1$ ha hvilken som helst positiv verdi. ... E



- (36) **Oppgave 6 2016/2017.** Linjestykket fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden kalles en *median* til trekanten, og det er kjent at de tre medianene møtes i ett punkt. Derfor inneholder ikke oppgaven nok informasjon til å bestemme lengden av AB . Hvis du ikke kjenner denne setningen, kan det være nok å se på de to valgene $AB = 4$ og $AB = 5$. Begge de resulterende trekantene er likebente, og symmetrien i likebente trekanter gjør det ekstra lett å se at medianene møtes i ett punkt. **E**

- (36) **Oppgave 8 2016/2017.** Summen av de horisontale linjene er $2AB = 2 \cdot 30 = 60$. Nå er $AH = BC - DE + FG$, så summen av de vertikale linjene er $BC + DE + FG + AH = BC + DE + FG + (BC - DE + FG) = 2BC + 2FG = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 10 = 52$. Summen blir $60 + 52 = 112$ **D**

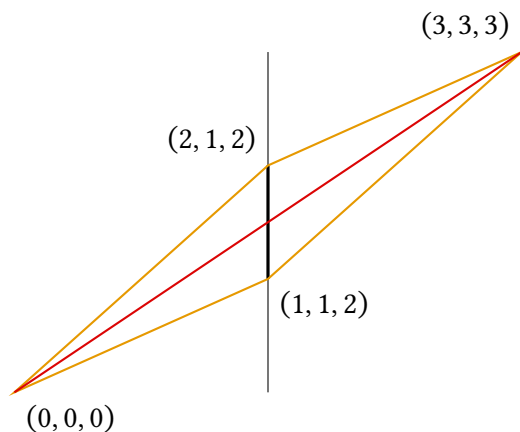
- (36) **Oppgave 14 2016/2017.** Vinkelsummen i en trekant er 180° , så $\angle C = 180^\circ - 15^\circ - 135^\circ = 30^\circ$. La B' være fotpunktet av normalen fra B på CA , og la P være speilingen av C i B' . Da er $\triangle PBC$ likebent. Spesielt er $\angle BPC = \angle BCP = 30^\circ$, så $\angle PBC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$, og $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = 135^\circ - 120^\circ = 15^\circ = \angle BAP$. Dermed er også $\triangle APB$ likebent, og vi har $AP = PB = BC = 1$. $\triangle CB'B$ har vinkler $30^\circ, 90^\circ$ og 60° , så $B'C = PB' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, og $AC = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **B**



- (37) **Oppgave 17 2016/2017.** Vi tenker oss at Anna og Birger starter i origo med positiv retning langs y -aksen. De går en total distanse $D = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{2015} = 2^{2016} - 1$. Birger går bare rett frem, og stopper i $x = 0, y = D$. Anna, derimot, går annenhver gang parallelt med y -aksen, og annenhver gang parallelt med x -aksen. Når vi tar hensyn til retningen, ender hun opp med $y = 1 - 4 + 2^4 - 2^6 + 2^8 - \dots + 2^{2012} - 2^{2014} = 1 - 4 + 4^2 - 4^3 + 4^4 - \dots + 4^{1006} - 4^{1007} = (1 - (-4)^{1008}) / (1 - (-4)) = \frac{1}{5}(1 - 2^{2016}) = -\frac{1}{5}D$, og tilsvarende $x = 2 - 8 + 2^5 - 2^7 + \dots + 2^{2013} - 2^{2015} = 2y = -\frac{2}{5}D$. Avstanden mellom de to er da $d = \sqrt{(-\frac{2}{5}D)^2 + (\frac{1}{5}D)^2} = \frac{1}{5}D\sqrt{40}$, så $D/d = 5/\sqrt{40} = \frac{1}{4}\sqrt{10}$ **A**



- (37) **Oppgave 19 2016/2017.** Legg et koordinatsystem slik at fluen starter i origo og ender opp i $(3, 3, 3)$. Kassen i sentrum har hjørner der alle tre koordinatene er enten 1 eller 2. Sett fra fluens startpunkt er tre av kassens sider synlige, og omrisset av den ser ut som en sekskant. Disse seks kantene er også synlige fra destinasjonen, så korteste vei går fra origo i rett linje til et punkt på en av dem, og deretter i rett linje til destinasjonen. På grunn av symmetrien spiller det ingen rolle hvilken av de seks kantene fluen velger å fly til. La oss velge kanten mellom $(1, 1, 2)$ og $(2, 1, 2)$, så fluen flyr fra $(0, 0, 0)$ via $(x, 1, 2)$ til $(3, 3, 3)$, der $1 \leq x \leq 2$.



Tenk deg nå at du forlenger sidekanten mellom $(1, 1, 2)$ og $(2, 1, 2)$, og bretter et ark om denne linjen slik at $(0, 0, 0)$ og $(3, 3, 3)$ begge ligger på arket, på hver sin side av bretten. Når du bretter arket ut igjen, får du en figur som den over. De oransje linjene viser fluens rute om den flyr via ett av hjørnene i den indre kassen. Den korteste veien er den rette linjen (rød i figuren), gjennom $(\frac{3}{2}, 1, 2)$.

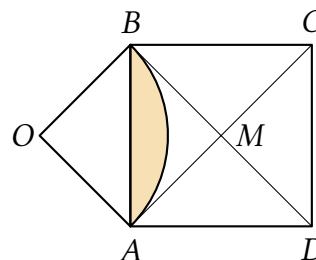
Lengden av denne ruten blir $L = 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4} + 5} = 2\sqrt{\frac{29}{4}} = \sqrt{29}$.

..... B

- (37) **Oppgave 3 2017/2018.** Syklisten kjørte først 24 km rett fram, og deretter $1800 \cdot 10 \text{ m} = 18 \text{ km}$ i rett vinkel på den første strekningen. Pytagoras viser at avstanden mellom start og ankomst er $\sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{900} \text{ km}$ C

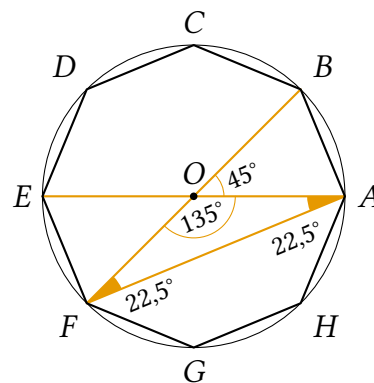


- (37) **Oppgave 7 2017/2018.** Kall sentrum i sirkelen O , og la M være skjæringspunktet mellom diagonalene AC og BD . Siden sirkelen tangerer diagonalene, er $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$. Også $\angle AMB$ er rett, så firkanten $AMBO$ er et kvadrat med sidelengde $\sqrt{2}$. Sirkelsektoren får areal $\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \pi/2$, og for å finne arealet av det skyggelagte området, trekker vi fra arealet av trekanten OAB , som er 1. **A**



- (38) **Oppgave 10 2017/2018.** Det finnes i hvert fall en slik trekant: Legger vi det tredje hjørnet i $(10, 0)$, får vi en trekant med grunnlinje 10 og høyde 13, og derfor areal $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$. Men hver gang vi har en slik trekant, med det tredje hjørnet i (a, b) , kan vi danne en ny trekant ved å forskyve dette hjørnet parallelt med den motstående siden til $(a + 5, b + 13)$. Den får da samme areal som den opprinnelige. Det kan gjentas så ofte man vil, så det finnes uendelig mange slike trekanter. **E**

- (38) **Oppgave 12 2017/2018.** Alle åttekantens hjørner ligger på en felles sirkel, med vinkelavstand $\frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$ mellom hjørnene. Spesielt er $\angle AOB = 45^\circ$, så for nabovinkelen blir $\angle AOF = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Fordi trekanten AOF er likebent, er $\angle OAF$ og $\angle OFA$ like store, og siden vinkelsummen i trekanten er 180° , må hver av de to vinklene være $22,5^\circ$ stor. (Det finnes mange andre veier til målet, for eksempel ved å utnytte at firkanten $ABEF$ er et rektangel av symmetrigrunner, og at trekanten AOB er likebent.)



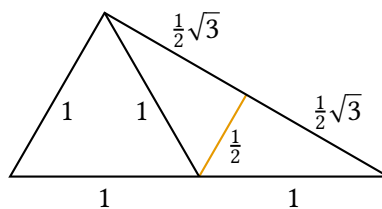
Alternativt kan vi benytte at vinkelen AFB er en periferivinkel tilsvarende sentralvinkelen AOB , og derfor halvparten så stor. **B**

- (38) **Oppgave 2 2018/2019.** Arealet er $\pi \cdot 1^2 = \pi = \tau/2$ **B**

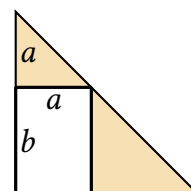
- (38) **Oppgave 3 2018/2019.** Den lange staven har lengde $L = K\sqrt{2^2 + 1^2} = K\sqrt{5}$ (Pytagoras). På samme måte er diagonalen i det store rektangelet $L\sqrt{5} = 5K$, så fem korte staver passer akkurat på diagonalen. **B**



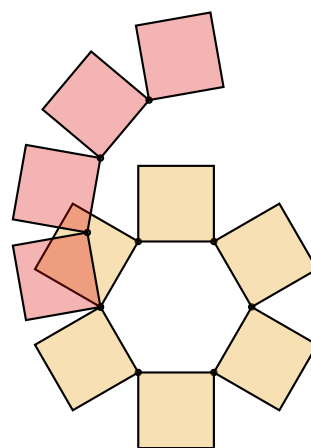
- (39) **Oppgave 6 2018/2019.** Trekanten til venstre er likesidet, så alle vinklene er 60° . Den stumpe vinkelen i trekanten til høyre er derfor $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Vinkelhalveringslinjen til den vinkelen er midtnormal til den ukjente siden, og deler trekanten til høyre i to kongruente trekanter med vinkler 30° , 60° og 90° . Forholdet mellom den lengste kateten og hypotenusen i en slik trekant er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, og den ukjente siden har derfor lengde $2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ **C**



- (39) **Oppgave 9 2018/2019.** Katetene i den store trekanten har lengde 12. Skriv a og b for sidene til rektangelet. De to katetene i den minste trekanten er like lange, og det følger at $a+b=12$. Rektangelet har areal $ab=72-40=32$. Det følger at a og b er løsningene til ligningen $x^2 - 12x + 32 = 0$, som er 4 og 8. **B**



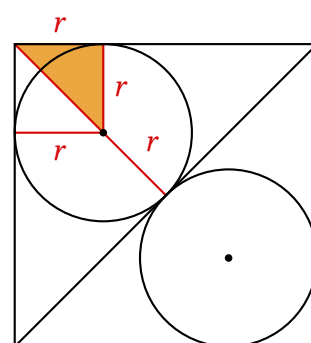
- (39) **Oppgave 12 2018/2019.** Rotasjonen gjør at det dannes en likesidet trekant mellom kvadratene, så rotasjonsvinkelen er 60° . Dermed blir vinkelen mellom de to nederste kvadratsidene 120° . Dette er akkurat vinkelen mellom to sider i en regulær sekskant, så de seks nederste kvadratsidene danner en regulær sekskant etter rotasjonen, og det sjuende kvadratet vil overlappe med det første. Dermed må vi fjerne de siste fire kvadratene, og står tilbake med de seks første. (I figuren er de siste fire rotasjonene bare påbegynt. Om vi hadde fullført dem, ville de fire siste kvadratene havnet direkte oppå de fire første.) . . . **B**



- (40) **Oppgave 3 2019/2020.** Hypotenusen i den fargelagte trekanten har lengde $\sqrt{2}r$. Linjestykket fra hjørnet til sentrum i kvadratet har derfor lengde $(\sqrt{2}+1)r$. Men den har også lengde $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, slik at avstanden mellom sirkelsentrene blir

$$2r = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 2 - \sqrt{2}.$$

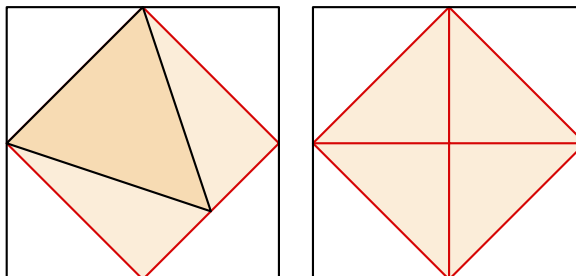
. **C**



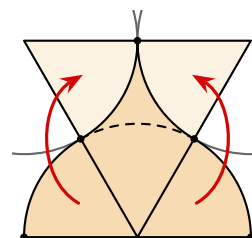
- (40) **Oppgave 7 2019/2020.** Om den minste sirkelen har radius r , så er $\pi r^2 + \pi(2r)^2 = 25$, altså $5\pi r^2 = 25$, slik at $r = \sqrt{5/\pi}$ **A**



- (40) **Oppgave 10 2019/2020.** Arealet til trekanten er halvparten av arealet til det skyggelagte kvadratet i figuren til venstre. Figuren til høyre inneholder åtte kongruente trekanter, og oppdeling viser at arealet til det skyggelagte kvadratet er halvparten av arealet til det ytterste kvadratet. Arealet av trekanten blir $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ A



- (40) **Oppgave 14 2019/2020.** Ved å flytte to sirkelsektorer, fyller vi akkurat en likesidet trekant der sidene har lengde 2. Da har trekanten høyde $\sqrt{3}$, så arealet er også $\sqrt{3}$. . . E



- (41) **Oppgave 17 2019/2020.** La oss si at trekanten ABC har sidekant s , høyde h og areal $a = \frac{1}{2}sh$. Høyden er en katet i en rettvinklet trekant der hypotenusen er s og den andre kateten er $s/2$, så $h^2 = s^2 - (s/2)^2 = \frac{3}{4}s^2$, og derfor $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}s$.

Trekanten DEC er også likesidet, med areal $\frac{3}{4}a$, og derfor sidekant $\frac{1}{2}\sqrt{3}s$. En av disse sidekantene er DE , og lengden er lik h (se slutten av første avsnitt).

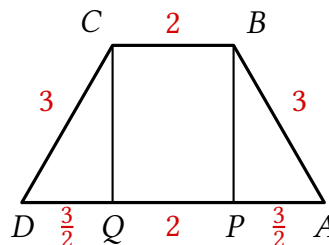
. A

- (41) **Oppgave 7 2020/2021.** Hver kvartsirkel har areal $\frac{\pi}{4}$, og den hvite trekanten i hver av dem har areal $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$. Arealet av det skyggelagte området er $2(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ D

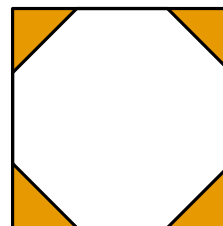
- (41) **Oppgave 9 2020/2021.** Trekanten AMN er likeformet med ABC , med lengdeforhold $\frac{1}{2}$. Foholdet mellom arealene er $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, og arealet av firkanten $BCNM$ blir $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ganger arealet av ABC D



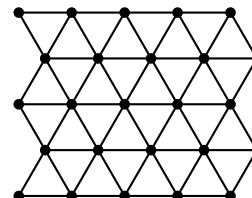
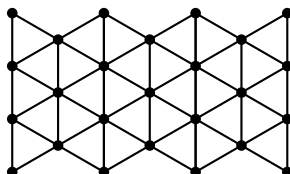
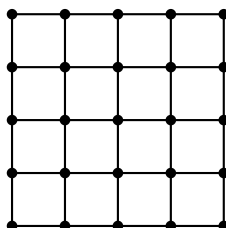
- (41) **Oppgave 11 2020/2021.** Sidene BC og AD er parallelle. (En av mange måter å vise det på, er å merke seg at trekantene BCD og CBA er kongruente, fordi begge har sider med lengde 2 og 3 med samme vinkel mellom. Men så har de to trekantene samme høyde regnet fra siden BC .) Trekk normaler fra B og C på AD , med fotpunkt P og Q . Så er $\angle ABP = \angle DCQ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. De to trekantene BAP og CDQ har hjørnevinkler 30° , 60° og 90° , så de korte katetene AP og DQ er halvparten så lange som hypotenusen, altså $\frac{3}{2}$. Videre er $|PQ| = |BC| = 2$, siden de to er motsatte sider i et rektangel. Alt i alt blir $|AD| = \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 5$ A



- (41) **Oppgave 16 2020/2021.** Formelen ($V = \frac{1}{3}Gh$) for volumet av en kjegle gir at denne kjeglen har volum lik arealet av åttekanten som er grunnflate i kjeglen. Skriv åttekanten inn i et kvadrat som vist i figuren. Hver av de skyggelagte trekantene er rettvinklet og likebent, med hypotenus av lengde 1, så katetene har lengde $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dermed har kvadratet areal $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Hver av de fire trekantene har areal $\frac{1}{4}$, til sammen 1 for alle fire (du kan også sette dem sammen til et kvadrat med sidekant 1). Åttekanten har således areal $3 + 2\sqrt{2} - 1 = 2 + 2\sqrt{2}$ A



- (42) **Oppgave 20 2020/2021.** Figurene under viser, fra venstre mot høyre, hvordan vi kan få plass til 25 Matteland-innbyggere i hvert av rommene C, D eller E. Hver av de korte linjestykkene i figurene har lengde 1 m. Høyden i hver småtrekant er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, så figuren i midten er akkurat $3\sqrt{3} \times 3$ meter, mens figuren til høyre er $\frac{9}{2} \times 2\sqrt{3}$ meter, som er mindre i begge retninger enn $\frac{1}{2}\pi^2 \times 2\sqrt{\pi}$. Rom A er større enn rom C i begge retninger, så der er det godt med plass.



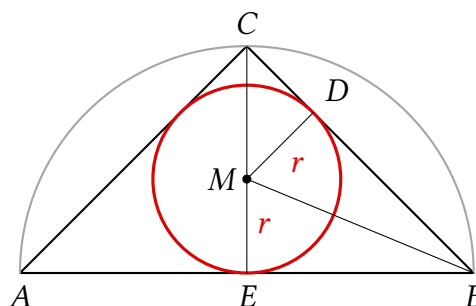
Hvis vi trekker en sirkel om hver innbygger med radius $\frac{1}{2}$ m, skal sirklene ikke overlappe. De kan stikke inntil en halvmeter utenfor rommet, så om alle fikk plass i rom B, måtte $25 \cdot \pi(\frac{1}{2})^2 < (\frac{5}{2}\sqrt{\pi})^2$ (ekte ulikhet fordi sirklene ikke fyller ut all plassen), så det går ikke. Rom B er det eneste, og derfor det største, av de som ikke har plass. B



- (42) **Oppgave 2 2021/2022.** Kall radien r . De to halvsirklene kan settes sammen til en hel sirkel med areal πr^2 . La oss kalle kateten i trekanten a . Hypotenusen i trekanten har lengde $4r$, så Pytagoras gir oss $a^2 + a^2 = (4r)^2$, og derfor $a^2 = 8r^2$. Arealet av trekanten blir $\frac{1}{2}a^2 = 4r^2$, slik at hele figuren får areal $4r^2 + \pi r^2 = (4 + \pi)r^2$. Men da er $(4 + \pi)r^2 = 1$, og dermed $r = 1/\sqrt{4 + \pi}$. . . **B**

- (42) **Oppgave 6 2021/2022.** Trekantene OCE og OCA er halvparten av henholdsvis romben $OCDE$ og $OCBA$, og hver av disse rombene er en tredjepart av hele sekskanten, altså med areal $\frac{1}{3}$. Det blir da også arealet av firkanten $ACEO$. **A**

- (42) **Oppgave 15 2021/2022.** Fordi trekanten er rettvinklet, er hypotenusen en diameter i den store sirkelen, så den har sidelengde 2. I figuren er E sentrum i den store sirkelen, så EC har lengde 1. Linjestykkene MD og AC er parallelle, fordi de har en felles normal BC . Så trekanten MDC er rettvinklet med vinkel 45° ved hypotenusen. Spesielt har linjestykke MC lengde $\sqrt{2} \cdot r$. Lengden av EC blir således $1 = r + \sqrt{2} \cdot r$, slik at $r = 1/(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - 1$ **D**

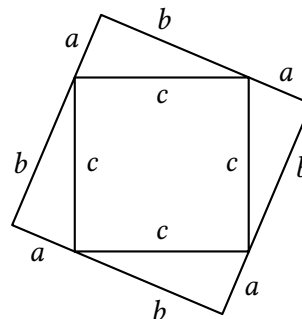


- (43) **Oppgave 20 2021/2022.** Stigningstallet til linjen BC er $\frac{57-11}{79-10} = \frac{46}{69} = \frac{2}{3}$, og ligningen til linjen kan skrives $2x - 3y = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 11 = -13$. Normalen til denne linjen gjennom A har ligningen $3x + 2y = 3 \cdot (-17) + 2 \cdot 45 = 39$. For å finne x -koordinaten til skjæringspunktet mellom de to linjene, ganger vi den første ligningen med 2 og den andre med 3, legger dem sammen, og får $13x = 3 \cdot 39 - 2 \cdot 13 = 7 \cdot 13$, altså $x = 7$. Da må x -koordinaten til speilbildet D være $x = 7 - (-17 - 7) = 31$. Til slutt finner vi y -koordinaten til D fra $3 \cdot 31 + 2y = 39$, så $y = \frac{39-3 \cdot 31}{2} = -\frac{54}{2} = -27$ **D**

- (43) **Oppgave 1 2022/2023.** Skriv O for omkretsen av den store firkanten. Summen av lengdene til alle linjestykkene i figuren er både lik summen av omkretsene til de to firkantene, altså $O + 38$, og summen av omkretsene til alle trekantene, altså $22 + 27 + 20 + 23 = 92$. Så vi har $O + 38 = 92$, og dermed $O = 54$ **A**

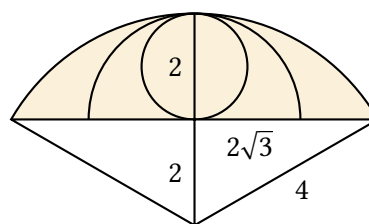


- (43) **Oppgave 12 2022/2023.** Legg til en trekant lik den første på de tre andre sidene av kvadratet, som vist i figuren. Resultatet blir et større kvadrat (fordi summen av de spisse vinklene i en rettvisklet trekant er 90°) med areal $529 + 4 \cdot 108 = 961$. Det store kvadratet har da sidekant $a + b = \sqrt{961} = 31$, mens det opprinnelige kvadratet har sidekant $c = \sqrt{529} = 23$. Femkantens omkrets er $3c + a + b = 69 + 31 = 100$.

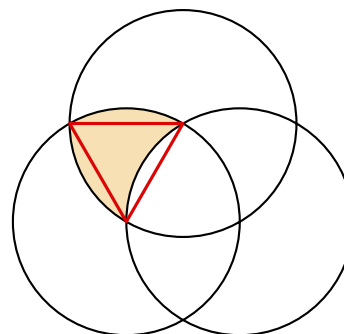


Alternativ løsning: Pytagoras anvendt på trekanten gir oss $a^2 + b^2 = c^2$, mens arealet er $\frac{1}{2}ab = 108$. Dermed blir $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 529 + 432 = 961 = 31^2$. Femkantens omkrets er som før $3c + a + b = 69 + 31 = 100$ **D**

- (43) **Oppgave 15 2022/2023.** Sirkelen med radius 1 har areal $F = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Halvsirkelen med radius 2 har areal $F + G = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$, så $G = \pi$ også. Det gjenstår å finne arealet av den store sirkelskalken $F + G + H$ (skyggelagt i figuren). Trekanten nede til høyre i figuren blir en 30-60-90-trekant, med areal $2\sqrt{3}$. Sirkelsektoren i figuren har åpningsvinkel 120° , så arealet av den er $\frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 = \frac{16}{3}\pi$. Dermed blir arealet av sirkelskalken $F + G + H = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$, slik at $H = \frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$. Men vi er mer interessert i å sammenligne: Altså, er $H - G = \frac{7}{3}\pi - 4\sqrt{3}$ positiv eller negativ? Vi kvadrerer hvert av de to leddene: $(\frac{7}{3}\pi)^2 = 49(\frac{\pi}{3})^2 > 49$ og $(4\sqrt{3})^2 = 48$, så $H - G > 0$ **A**



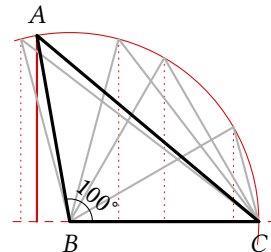
- (44) **Oppgave 17 2022/2023.** Det skyggelagte arealet i figuren er summen av arealet av trekanten pluss arealet av to «sirkelskalker», minus arealet av én «sirkelskalk». Netto blir det arealet av trekanten pluss én «sirkelskalk». Men det er arealet av en sirkelsektor med vinkel 60° , med andre ord $\frac{\pi}{6}$ (ettersom radien er 1). Vi ganger med 3, og får arealet $\frac{\pi}{2}$ **E**



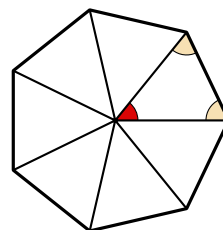
- (44) **Oppgave 18 2022/2023.** Det lille kvadratet har sidekant 1, og vi lar det store kvadratet ha sidekant a . I figuren finner vi to likeformedede rettvisklede trekanter, med felles hjørne øverst til venstre. Den store har kateter $a + 1$ og a . Den lille har derfor kateter 1 og $a/(a + 1)$. Den korteste kateten er grunnlinje i den skyggelagte trekanten, med høyde a , så den trekanten har areal $\frac{1}{2}a \cdot a/(a + 1)$. Dette arealet skal være lik 1, slik at $a^2 = 2(a + 1)$, det vil si $(a - 1)^2 = 3$, med positiv løsning $a = 1 + \sqrt{3}$. Arealet av de største kvadratet blir $a^2 = 2(a + 1) = 4 + 2\sqrt{3}$ **E**



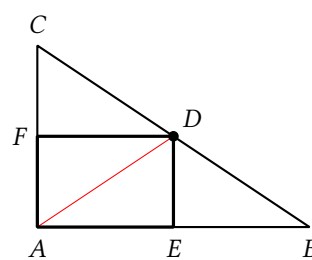
- (44) **Oppgave 4 2023/2024.** Sett navn på hjørnene som vist i figuren, med $AB = BC = 1$. Høyden fra A til grunnlinjen BC er $\sin b$, der b er vinkelen i B . (Den skal ganges med lengden av BC , som er lik 1.) Sinusfunksjonen vokser fra 0° til 90° og avtar deretter frem til 180° (og forbi), og den er symmetrisk om 90° : $\sin(90^\circ - x) = \sin(90^\circ + x)$. Størst høyde, og dermed størst areal, får vi når b er nærmest 90° . Vi kan også se dette geometrisk: Punktet A ligger i alle fall på sirkelen med radius 1 og sentrum i B , og det er knapt overraskende at høyden blir større jo nærmere $\angle ABC$ er til en rett vinkel. **D**



- (44) **Oppgave 8 2023/2024.** Del inn mangekanten (med n hjørner) i trekanter ved å trekke et linjestykke fra sentrum til hvert hjørne. Vinkelen i sentrumshjørnet av trekanten er $360^\circ/n$. Siden vinkelsummen i en trekant er 180° , er summen av de to andre vinklene i trekanten lik $180^\circ - 360^\circ/n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. Den summen er også lik vinkelen mellom nabosider i n -kanten. Nå setter vi inn $n = 3, 4$, og så videre, med resultat $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ, \frac{900^\circ}{7}, 135^\circ, 140^\circ, 144^\circ$, og der stopper vi, siden vi fant en mulighet. Generelt, for å se om g° er en mulig vinkel, kan vi løse ligningen $180 - 360/n = g$ og få $n = 360/(180 - g)$. For eksempel er $360/(180 - 169) = 360/11$ ikke et heltall, så ingen regulær mangekant har vinkel 169° **D**



- (45) **Oppgave 9 2023/2024.** Trekantene ABC , EBD og FDC er alle likeformedede, siden de har felles vinkler. Dersom lengdeforholdet $CD : CB$ er x , har trekantene EBD og FDC areal henholdsvis x^2 og $(1 - x)^2$ ganger arealet av ABC . Rektanglet $DFAE$ utgjør halvparten av arealet til ABC presis når de to småtrekantene tilsammen utgjør halvparten, det vil si når $x^2 + (1 - x)^2 = \frac{1}{2}$. Rydder vi i denne ligningen får vi $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$, det vil si $2(x - \frac{1}{2})^2 = 0$, så $x = \frac{1}{2}$. Pytagoras på trekanten ABC gir $CB = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$, slik at $CD = \frac{1}{2}CB = \sqrt{13}$ **C**

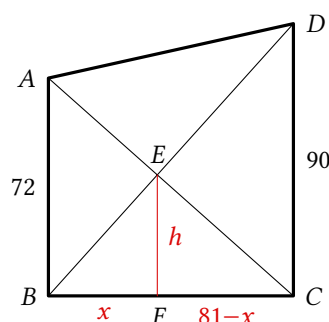




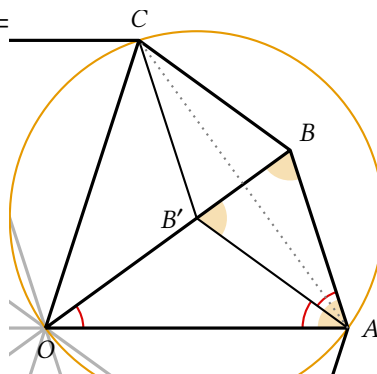
- (45) **Oppgave 11 2023/2024.** Når vi tar bort det nest største kvadratet fra det største, står vi igjen med fire 30-60-90-trekanter. Vi kaller lengden av hypotenusen i disse x . Katetene har da lengde $\frac{1}{2}x$ og $\frac{1}{2}\sqrt{3}x$. Vi må ha $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}x = 1$ (siden kanten i det største kvadratet), så $x = 2/(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$. Forholdet mellom sidelengdene til to kvadrater etter hverandre er altså $\sqrt{3} - 1$, så sidelengden til det innerste kvadratet er $(\sqrt{3} - 1)^3 = (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} - 1 = 6\sqrt{3} - 10$.

..... B

- (45) **Oppgave 14 2023/2024.** La F være fotpunktet til normalen fra E på BC . Fra de likeformede trekantene BFE og BCD får vi $x/h = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$, og de likeformede trekantene CFE og CBA gir oss $(81 - x)/h = \frac{81}{72} = \frac{9}{8}$. Skriv om den første ligningen til $x = \frac{9}{10}h$ og den andre til $x = 81 - \frac{9}{8}h$, og kombiner de to. Det gir $81 = (\frac{9}{8} + \frac{9}{10})h = \frac{81}{40}h$, så $h = 40$, og trekanten BCE har areal $\frac{1}{2} \cdot 81 \cdot 40 = 1620$.



- (45) **Oppgave 18 2023/2024.** Vi har $\angle AOB = 360^\circ/10 = 36^\circ$. Og siden trekanten AOB er likebent, med $OA = OB$, er $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$ (husk at vinkelsummen i en trekant er 180°). Fordi A og C ligger symmetrisk om OB , er det rett vinkel mellom AC og OB , så B' ligger på linjestykket OB , og $\angle AB'B = \angle ABB' = 72^\circ$. Men da er $\angle BAB' = 36^\circ$ (vinkelsum nok en gang), og dermed $\angle OAB' = \angle OAB - \angle BAB' = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. Det følger at trekantene $AB'O$ og BAB' begge er likebente, så $OB' = AB' = AB = 1$.

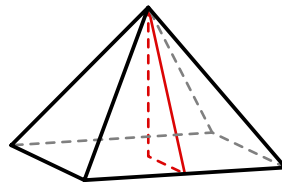


Alternativ løsning: Etter å ha funnet (som i den første løsningen) at $\angle AOC = 72^\circ$ og $\angle AB'C = 144^\circ = 2 \cdot \angle AOC$, bruker vi sentralvinkelsetningen (egentlig omvendingen av setningen om at en sentralvinkel er dobbelt så stor som en tilhørende periferivinkel) for å se at B' er sentrum i den omskrevne sirkelen til trekanten OAC , så $OB' = AB' = AB = 1$. (Likheten $AB' = AB$ er en umiddelbar konsekvens av speilingen.)

..... A

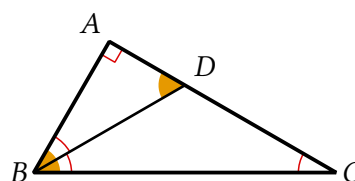


- (46) **Oppgave 6 2024/2025.** La x være halve lengden av sidekantene i pyramiden. En likesidet trekant med sidekant $2x$ har høyde $\sqrt{3}x$. En slik høyde er hypotenus i en rettvinklet trekant (se figuren) der en katet er x og den andre kateten er høyden i pyramiden. Pytagoras gir nå $x^2 + 10^2 = 3x^2$, så $x^2 = 50$. Hver sideflate har areal $x \cdot \sqrt{3}x = \sqrt{3}x^2 = 50\sqrt{3}$, mens grunnflaten har areal $4x^2 = 200$, så det totale arealet blir $200(1 + \sqrt{3})$ **B**

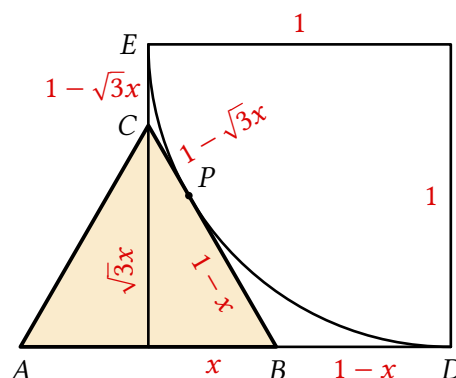


- (46) **Oppgave 11 2024/2025.** Om katetene har lengde a og b , er $a^2 + b^2 = 100$ (Pytagoras), mens $\frac{1}{2}ab = a + b + 10$. Om vi multipliserer den siste ligningen med 4 og legger til den første, får vi $(a+b)^2 = 4(a+b) + 140$, dermed $(a+b-2)^2 = 144$, slik at $a + b = 2 \pm 12$. Her må vi velge den positive løsningen: $a + b = 14$. . **C**

- (46) **Oppgave 12 2024/2025.** I lengdeforholdet $1 : 2 : \sqrt{3}$ kjenner vi igjen sidene i en 30–60–90-trekant, slik at $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$ og $\angle CAB = 90^\circ$. Så er $\angle DBC = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, slik at trekanten BCD er likebent: $BD = CD$, mens også BDA er en 30–60–90-trekant. Dermed er $AD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CD$, så $AD = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ **D**



- (46) **Oppgave 19 2024/2025.** De to kvartsirkelene må være like store for å tangere slik det vises i figuren, så hver av dem har radius 1. Takket være symmetrien kan vi nøye oss med å studere den ene kvartsirkelen. La x være halve sidelengden i trekanten ABC . Da er høyden lik $\sqrt{3}x$. Siden sirkelen har radius 1, blir da $BD = 1 - x$ og $CE = 1 - \sqrt{3}x$. Nå benytter vi at om vi har et punkt utenfor en sirkel og trekker de to sirkeltangentene gjennom punktet, er de to tangeringspunktene like langt fra det gitte punktet. Dermed er $PB = BD = 1 - x$ og $PC = CE = 1 - \sqrt{3}x$. Nå har vi to mål på sidekanten BC : $2x = (1 - x) + (1 - \sqrt{3}x)$, som gir oss $(3 + \sqrt{3})x = 2$. Vi ganger med $\frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})$ og får $x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Arealet av trekanten blir $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{4}{3}\sqrt{3} - 2$ **B**





Kombinatorikk og sannsynlighet

- (47) **Oppgave 4 2005/2006.** For hver av de tre forrettene er det fem muligheter for hovedretten – til sammen 15 kombinasjoner. For hver av de 15 kombinasjonene er det seks muligheter for desserten – til sammen $15 \cdot 6$ kombinasjoner. E
- (47) **Oppgave 15 2005/2006.** Hus nr. 1 kan males på 2 måter. For hver av disse mulighetene kan hus nr. 2 males på 2 måter – til sammen 2^2 muligheter. For hver av disse mulighetene kan hus nr. 3 males på 2 måter – til sammen 2^3 muligheter. Fortsetter vi slik, ser vi at husene kan males på 2^9 måter. Halvparten av disse, $2^8 = 256$ måter, har færre røde enn blå hus. D
- (47) **Oppgave 19 2005/2006.** La x være sannsynligheten for at Arild vinner. Da er $1 - x$ sannsynligheten for at Berit vinner. Hvis de spiller spillet mange ganger, vinner Arild på første kast i $1/6$ av tilfellene. I de $5/6$ av tilfellene der det ikke skjer, har Berit samme sannsynlighet for å vinne som det Arild har i utgangspunktet. Berits sannsynlighet for å vinne er altså $5/6$ av Arilds sannsynlighet for å vinne. Så $1 - x = \frac{5}{6}x$, slik at $x = 6/11$ A
- (47) **Oppgave 3 2006/2007.** De 8 bøkene på 3 kg må sendes i hver sin eske. Ingen av de 3 bøkene på 2 kg kan legges i noen av de nevnte 8 eskene, og 2 esker må til for å sende disse, slik at 10 esker trengs. Det er plass til de 2 bøkene på 1 kg for eksempel i eska med 1 bok på 2 kg. C
- (47) **Oppgave 6 2006/2007.** Første gutt kan plukkes ut på 8 måter. For hver av disse mulighetene kan andre gutt plukkes ut på 7 måter. Da vi ikke skiller mellom et utvalg av to gutter og et utvalg av de to samme der den første og den andre utplukkete er byttet om, er antall utvalg av 2 gutter $8 \cdot 7/2 = 28$. For hver av disse 28 mulighetene, har vi på samme måte $5 \cdot 4/2 = 10$ mulige utvalg av to jenter – til sammen $28 \cdot 10 = 280$ mulige lag. C
- (48) **Oppgave 9 2006/2007.** Trekker vi den første likningen fra den andre, får vi $b + 2c = 12$. Dette er mulig med positive heltallige b og c når c er lik 1, 2, 3, 4 eller 5. Også a blir positiv og heltallig i disse tilfellene. B
- (48) **Oppgave 13 2006/2007.** Det er 20 kvadrater av med sidelengde 1, 12 kvadrater med sidelengde 2, 6 kvadrater med sidelengde 3 og 2 kvadrater med sidelengde 4. C



- (48) **Oppgave 15 2006/2007.** Hvis vi har en rød, en blå og en grønn terning, er det 6 muligheter for den røde, 6 muligheter for hver av disse for den blå, til sammen 36 muligheter, og for hver av disse 6 muligheter for den grønne, til sammen $36 \cdot 6 = 216$ like sannsynlige muligheter. Terningene kan gi 12 på 6 måter med verdiene $1 + 5 + 6$, på 6 måter med $2 + 4 + 6$, på 3 måter med $2 + 5 + 5$, på 3 måter med $3 + 3 + 6$, på 6 måter med $3 + 4 + 5$ og på 1 måte med $4 + 4 + 4$ – til sammen 25 måter. **D**
- (48) **Oppgave 6 2007/2008.** Det er 9 muligheter (1–9) for første og 10 muligheter (0–9) for andre siffer i et tosifret tall. Av disse 90 tallene er det 5 muligheter for odde førstesiffer og 5 muligheter for odde andresiffer, altså 25 tall der begge sifrene er odde. Antallet der minst ett siffer er jamt, er $90 - 25 = 65$ **D**
- (48) **Oppgave 10 2007/2008.** Vi kan anta at $x < y < z < t$. Da er $xy < xz < xt < yt < zt$, så det er minst 5 forskjellige produkt. Men det er bare 5 forskjellige produkt av to av tallene 1, 2, 3 og 6 (fordi $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$). Så vi kan bare være sikre på at det er 5 forskjellige produkt. **D**
- (48) **Oppgave 15 2007/2008.** Det er én type terning som er helt svart, og én helt hvit. Det er også bare én type terning med én svart side, og én med fem svarte sider (én hvit side). Det er to typer terninger med to svarte sider – de svarte sidene kan være naboer eller motsatt av hverandre. Av samme grunn er det to typer terninger med fire svarte (to hvite) sider. Det er to typer terninger med tre svarte sider – de tre sidene er alle naboer med hverandre, eller to av de tre sidene er motsatt av hverandre. **D**
- (49) **Oppgave 2 2008/2009.** Første bokstav kan velges på 4 måter. For hver av disse måtene, kan vi velge andre bokstav på 2 måter (en av de to vokalene hvis første bokstav var konsonant, og en av de to konsonantene hvis første bokstav var vokal) – til sammen kan de to første bokstavene velges på 8 måter. For de to siste bokstavene har vi ikke noe valg. **D**
- (49) **Oppgave 13 2008/2009.** Antall par (x, y) av hele tall, der x og y er fra og med 1 til og med 20, er 20^2 . I 20 av disse er $x = y$. Vi krever $x \leq y$, og må se bort fra halvparten av de øvrige $20^2 - 20$ parene. Antallet er $20 + (20^2 - 20)/2 = 210$ **C**
- (49) **Oppgave 16 2008/2009.** Vi har de ti mulighetene 20, $10 + 10$, $10 + 5 + 5$, $10 + 5 + 1 + \dots + 1$, $10 + 1 + \dots + 1$, $5 + 5 + 5 + 5$, $5 + 5 + 5 + 1 + \dots + 1$, $5 + 5 + 1 + \dots + 1$, $5 + 1 + \dots + 1$ og $1 + \dots + 1$ **C**



- (49) **Oppgave 19 2008/2009.** Skriv de to tallene som $28 - x$ og $28 + x$. Vi krever $28^2 - x^2 = (28 - x)(28 + x) > 650$, det vil si $x^2 < 28^2 - 650 = 134$. Fordi $11^2 = 121 < 134$, mens $12^2 = 144 > 134$, er ulikheten oppfylt når $-11 \leq x \leq 11$. De 23 mulige verdiene av x gir 23 forskjellige tallpar. **D**
- (49) **Oppgave 20 2008/2009.** På figuren er tallet i punkt (x, y) i 4×2 -rutenettet antall måter vi kan oppnå stillingen x poeng til Kari og y poeng til Per på. Antall måter vi kan oppnå en stilling der Kari eller Per har 0 poeng på, er én (Kari har vunnet alle rundene eller Per har vunnet alle rundene). Hvis vi starter med disse enerne, som er markert på ak-sene, kan vi bygge ut tabellen ved å la tallet i (x, y) være summen av tallene i $(x - 1, y - 1)$ (siste runde var uavgjort), $(x - 1, y)$ (Kari vant siste runde) og $(x, y - 1)$ (Per vant siste runde). **D**
- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|----|---|----|
| 1 | — | 5 | — | 13 | — | 25 | — | 41 |
| | / | | / | | / | | / | |
| 1 | — | 3 | — | 5 | — | 7 | — | 9 |
| | / | | / | | / | | / | |
| 1 | — | 1 | — | 1 | — | 1 | — | 1 |
- (49) **Oppgave 1 2009/2010.** Det første huset kan males i én av 3 farger. For hver av disse mulighetene er det 2 muligheter for neste hus – til sammen 6 muligheter. For hver av disse mulighetene er det 2 muligheter for neste hus – til sammen 12 muligheter. For hver av disse mulighetene er det 2 muligheter for neste hus – til sammen 24 muligheter. **B**
- (50) **Oppgave 6 2009/2010.** Det første sifferet kan velges på 2 måter. For hver av disse mulighetene kan andre siffer velges på 10 måter og tredje siffer på 10 måter – til sammen 200 muligheter. Hvis summen av de tre første sifrene er partall, velges 8 som siste siffer, ellers 9. **D**
- (50) **Oppgave 16 2009/2010.** Hvis vi har nummerert kulene fra 1 til 10, er det 10 muligheter for valg av første uttrukne kule, for hver av disse er det 9 muligheter for valg av andre kule, og for hver av disse kombinasjonene 8 muligheter for valg av tredje kule – til sammen $10 \cdot 9 \cdot 8$ mulige utvalg, som alle er like sannsynlige. La det være x blå, y røde og z gule kuler blant de 10. Av utvalg med én kule av hver farge fins det x muligheter for den blå kula, y for den røde og z for den gule – til sammen xyz utvalg hvis vi ikke tar hensyn til rekkefølgen de blir trukket i. Hvis vi tar hensyn til at det for hvert av disse xyz utvalgene er 6 mulige rekkefølger kulene kan trekkes i, har vi at $6xyz$ av de $10 \cdot 9 \cdot 8$ like sannsynlige utvalgene gir én kule av hver farge. Vi vet at $6xyz/(10 \cdot 9 \cdot 8) = 3/10$, altså $xyz = 36$, der $x + y + z = 10$. Fordi z er størst og 36 er delelig med z , er $z = 4, 6$ eller 9 . Bare $z = 4$ gir noen mulighet for x og y (begge lik 3). **A**



- (50) **Oppgave 18 2009/2010.** Vi tenker oss at de fortsetter å spille også etter at førstemann har vunnet tre runder. Ole er førstemann til tre runder hvis og bare hvis han vinner 2 eller flere av de neste 4 rundene. Det er 16 like sannsynlige utfall av de neste 4 rundene. Ett gir 4 seire til Marte og 4 gir 3 seire til Marte. De resterende 11 gir 2 eller flere seire til Ole, så sannsynligheten er $11/16$ C
- (50) **Oppgave 2 2010/2011.** Hver av de 20 personene hilser på 18 personer, så hvis vi tar for oss person for person og legger sammen antall håndtrykk, blir svaret $20 \cdot 18$. Da er hvert håndtrykk telt to ganger (en gang for hver person som deltar i håndtrykket), så antallet er $20 \cdot 18/2 = 180$ C
- (50) **Oppgave 5 2010/2011.** Vi nummerer eplene fra 1 til 10, og antar at 1–6 er grønne. Vi tenker oss at Berit trekker ett eple om gangen. Det er 10 muligheter for første eple. For hver av disse mulighetene er det 9 muligheter for andre eple – til sammen $10 \cdot 9$ muligheter. For hver av disse $10 \cdot 9$ mulighetene er det 8 muligheter for tredje eple – til sammen $10 \cdot 9 \cdot 8$ mulige utvalg av 3 epler – alle like sannsynlige. Et tilsvarende resonnement viser at det er $6 \cdot 5 \cdot 4$ mulige utvalg av 3 grønne epler, slik at sannsynligheten for at alle er grønne er $6 \cdot 5 \cdot 4/(10 \cdot 9 \cdot 8) = 1/6$ C
- (51) **Oppgave 13 2010/2011.** Det kan være 1, 2 eller 3 styremedlemmer i komiteen. Disse kan velges på henholdsvis 3 måter, 3 måter eller 1 måte. De øvrige medlemmene kan velges på henholdsvis $7 \cdot 6/2 = 21$ måter (den ene kan velges blant de 7 som ikke er styremedlemmer, den andre blant de 6 resterende, men da har vi telt alle par to ganger – derfor deler vi med 2), 7 måter eller 1 måte (nemlig ingen øvrige medlemmer). Til sammen kan komiteen settes sammen på $3 \cdot 21 + 3 \cdot 7 + 1 = 85$ måter. (Vi kan også tenke slik: Det er $10 \cdot 9 \cdot 8/6$ mulige komiteer, der vi har delt med 6 fordi 6 ulike rekkefølger av valg av de tre gir samme komité, og $7 \cdot 6 \cdot 5/6$ mulige komiteer valgt blant de som ikke er styremedlemmer. Differansen er 85.) D
- (51) **Oppgave 15 2010/2011.** Vi kan velge den felles siden på 16 måter. De to siste hjørnene i firkanten kan velges blant 12 hjørner (vi kan ikke velge de to hjørnene i kanten vi allerede har valgt, eller de to nabohjørnene på hver side av kanten). Dette kan gjøres på $12 \cdot 11/2 = 66$ måter (vi deler med 2 fordi to ordnede par av hjørner definerer samme kant). Men da har vi fått med 11 par av hjørner der begge hjørnene hører til samme kant i 16-kanten. Så det totale antall firkanter med nøyaktig én side felles med 16-kanten er $16 \cdot (66 - 11) = 880$ E



- (51) **Oppgave 16 2010/2011.** Bokstavene *eimm* kan oppta 4 av 10 plasser. Det er 10 muligheter for plassering av *e*. For hver av disse mulighetene er det 9 muligheter for *i*, til sammen $10 \cdot 9$ muligheter. Videre er det 8 og 7 muligheter for *m*-ene, til sammen $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 2 = (10 \cdot 7 / 2) \cdot (9 \cdot 8) = 35 \cdot 72$ muligheter (vi har delt med 2 fordi to plasseringer av første og andre *m* gir samme ord). Resten av bokstavene, *aaktt*, plasseres i denne rekkefølgen på de ledige plassene. **C**
- (51) **Oppgave 2 2011/2012.** Hver jente sitter ved siden av en annen jente, men det kan ikke sitte tre jenter på rad. Hver gutt må sitte mellom to jenter, for hvis to gutter sitter ved siden av hverandre, kan vi bare ha gutter rundt bordet. Dermed sitter barna etter mønsteret to jenter, en gutt, to jenter, en gutt og så videre, så det er dobbelt så mange jenter som gutter: ti jenter og fem gutter. **A**
- (51) **Oppgave 5 2011/2012.** Anta at Kari og Ida har n venner felles i klassen. Da har Kari $14 - n$ venner som ikke er venner med Ida og Ida har $13 - n$ venner som ikke er venner med Kari. Det betyr at det må være minst $n + (14 - n) + (13 - n) = 27 - n$ elever i klassen. Dette betyr at n ikke kan være mindre enn 7.
- La Kari og Ida være venner og del de 18 andre elevene inn i 6 elever som bare er venn med Kari, 5 som bare er venn med Ida og 7 som er venn med begge. Da får Kari akkurat 14 venner, Ida akkurat 13 venner og de har 7 felles venner. **B**
- (51) **Oppgave 9 2011/2012.** La Anne, Berit og Cecilie få henholdsvis A , B og C klinkekuler. Da må $C = 2A$, $A < B < C$ og $A + B + C = 2011$. Det gir $B = 2011 - C - A = 2011 - 3A$. Ulikhetene kan dermed skrives som $A < 2011 - 3A < 2A$. Den første ulikheten gir $4A < 2011$, eller $A < 502\frac{3}{4}$. Den andre gir $2011 < 5A$ eller $402\frac{1}{5} < A$. Siden A må være et heltall kan vi skrive $403 \leq A \leq 502$. Det er dermed $502 - 403 + 1 = 100$ måter å gjøre det på. .. **E**
- (52) **Oppgave 13 2011/2012.** Alle trekanter i figuren er rettvinklede og har hypotenus langs en av de skrå linjene. Ethvert valg av to punkter langs en av de skrå linjene gir to trekanter med de to punktene i enden av hypotenusen, én over og én under den skrå linjen. De skrå linjene har 2, 3, 4, 5, 4, 3 og 2 punkter. Man kan velge ut to av n punkter på $\frac{1}{2}n(n-1)$ måter, så antall trekanter blir $2\left(\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2}\right) = 2(1 + 3 + 6 + 10 + 6 + 3 + 1) = 60$. **C**



- (52) **Oppgave 18 2011/2012.** La oss si at det finnes a_n gode ord av lengde n . Begge ord av lengde 1 er gode, så $a_1 = 2$. Av lengde 2 kan vi ha AA, AB eller BA, så $a_2 = 3$. Vi får alle gode ord av lengde $k > 2$ ved å starte med A og fortsette med et godt ord av lengde $k - 1$ eller starte med BA og fortsette med et godt ord av lengde $k - 2$. Det vil si $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$. Dermed blir $a_3 = a_2 + a_1 = 5$, $a_4 = a_3 + a_2 = 8$, $a_5 = a_4 + a_3 = 13$, $a_6 = a_5 + a_4 = 21$, $a_7 = a_6 + a_5 = 34$ og $a_8 = a_7 + a_6 = 55$ C

- (52) **Oppgave 3 2012/2013.** Siste siffer er gitt når de to første sifrene er kjent. Når første siffer er s kan andre siffer være hva som helst mellom 0 og s , i alt $s + 1$ muligheter. Legger vi sammen antall muligheter for første siffer lik 1, 2, 3, ..., 9, får vi i alt $2 + 3 + 4 + \dots + 10 = 54$ muligheter. D

- (52) **Oppgave 8 2012/2013.** I hvert terningkast er sannsynligheten for oddetall og partall like stor, så vi kan løse dette ved enkel opptelling av mulighetene. Det er i alt $2^3 = 8$ mulige utfall av tre terningkast, når vi bare ser på pariteten av hvert kast. Gitt at vi får ett oddetall og to partall, er det tre mulige valg for hvilket terningkast som gir oddetall. Sannsynligheten er derfor $3/8$ B

- (52) **Oppgave 14 2012/2013.** Med k sorte sokker av i alt $n = 29 + k$ sokker er sjansen for å få to sorte sokker lik

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{(29+k)(28+k)} = \frac{1}{30}.$$

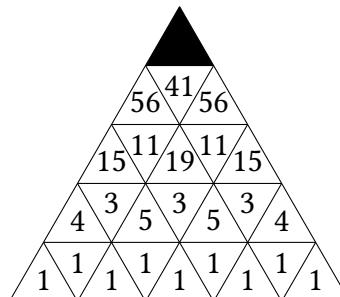
Skriv dette om til $30k(k-1) = (29+k)(28+k)$. Opprydning leder til $29k^2 - 87k = 28 \cdot 29$, som kan divideres med 29 og gi $k^2 - 3k = 28$. Eneste positive løsning til denne ligningen er $k = 7$ C

- (53) **Oppgave 5 2013/2014.** A er feil – for eksempel BRBRBRH. B er feil – for eksempel RRRHBBB. C er feil – for eksempel BRBRBRH. D er feil – for eksempel BRBRBRH blir til BRBRBRB. E

- (53) **Oppgave 10 2013/2014.** Vi kan lage $3^6 = 729$ koder dersom vi ser bort fra kravet om at alle sifrene skal brukes. Vi kan lage $2^6 = 64$ koder med bare sifrene 1 og 2, og tilsvarende om vi bruker bare 1 og 3 eller bare 2 og 3. Det gir i alt $3 \cdot 64 = 192$ koder som bare bruker to siffer. Men da har vi tellet med de tre kodene som bruker bare ett siffer to ganger hver, altså en gang for mye. Så det er bare $192 - 3 = 189$ koder som ikke bruker alle de tre sifrene. Dermed er det i alt $729 - 189 = 540$ koder som bruker alle sifrene. C



- (53) **Oppgave 15 2013/2014.** Vi fyller inn figuren nedenfra, der tallet i hver rute er totalt antall veier fra denne ruten til nederste rad. Det vil si at vi fyller inn nederste rad med ettall, og ellers skal hver rute ha et tall lik summen av tallene til naboene i raden under. Merk at trekanter med spissen ned har tre naboer i raden under, de med spissen opp har fem, unntatt de på enden av hver rad, som har fire – og den øverste, som har tre. Det totale antallet veier fra øverste rute blir så summen av de tre tallene i raden under, det vil si $56 + 41 + 56 = 153$. (Noen vil sikkert finne det mer naturlig å fylle inn figuren ovenfra, da med antall veier fra den svarte ruten til hver enkelt rute. Så må man addere tallene i nederste rad til slutt.) **B**



- (53) **Oppgave 19 2013/2014.** Siden tre sider som møtes i ett hjørne alle er nabosider, må Trine bruke minst tre farger på hver terning. Ingen farge kan brukes på flere enn to sider, og de to sidene må i tilfelle være motstående.

Om hun bruker bare tre farger på en terning, må motstående sider alltid ha samme farge. Dersom to terninger er malt med de samme tre fargene, er de likt malt: For når vi ser på et hjørne, er det to mulige rekkefølger på fargene til de tre sidene som møtes der, og valget av rekkefølge bestemmer fargeleggingen. Går vi til et nabohjørne, står de samme tre fargene i motsatt rekkefølge, så vi kan finne et hjørne i hver terning som har fargene i samme rekkefølge. Da er også terningene likt malt. Men det er fire måter å velge ut hvilken farge vi *ikke* skal bruke, så bare fire terninger kan males forskjellig fra hverandre med tre farger hver.

Skal Trine bruke alle fire fargene på en terning, må hun bruke to farger to ganger og to farger én gang hver. La oss si at farge I og II brukes to ganger hver, mens farge III og IV brukes én gang hver. Så farge I brukes på to motstående sider, og farge II også på to motstående sider, med farge III og IV på hver sin av de siste motstående sidene. To terninger som er malt slik er malt likt, for vi kan legge dem med siden som er malt IV opp og III ned, og så rotere terningene om vertikalaksen til sidene med I og II vender samme vei. Eneste valgmulighet i dette tilfellet er hvilke to farger som skal være I og II, uten hensyn til rekkefølgen. Dette kan gjøres på $4 \cdot 3/2 = 6$ måter.

Trine kan altså male i alt $4 + 6 = 10$ terninger forskjellig fra hverandre. . . **A**



- (54) **Oppgave 10 2014/2015.** Det må finnes minst $N = 20$ brikker av hver farge for at det ikke skal være mulig å trekke til sammen 81 brikker av de andre fargene. Det høyeste mulige antallet brikker av én farge kan oppnås om det ikke er fler enn 20 brikker av hver av de tre andre fargene, det vil si 60 brikker til sammen. Så det er mulig å ha $M = 40$ brikker av én farge. $M - N = 20$. **C**
- (54) **Oppgave 12 2014/2015.** Skriv p for sannsynligheten for at Anne vinner. Hvis hun ikke vinner i første myntkast, så er rollene byttet om. Det betyr at Bente i så fall vinner med sannsynlighet p , så Anne vinner med sannsynlighet $1 - p$. Anne kan altså vinne på én av to måter: Hun vinner i første myntkast, med sannsynlighet $\frac{1}{2}$, eller hun vinner senere, med sannsynlighet $\frac{1}{2}(1 - p)$. Derfor er $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p) = 1 - \frac{1}{2}p$, slik at $p = \frac{2}{3}$. En variant av dette argumentet gir $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$, fordi sannsynligheten for at ingen har vunnet etter to myntkast er $\frac{1}{4}$, og i så fall starter spillet på ny, slik at Anne igjen har sannsynlighet p for å vinne. *Alternativt:* Anne vinner på kombinasjonene K, MMK, MMMMK og så videre. Disse har til sammen sannsynlighet $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \dots = \frac{2}{3}$. **B**
- (54) **Oppgave 15 2014/2015.** Siden 20 er et partall og 5 er odde, må Lars bruke ingen, to eller fire brikker av høyde 5. Det første og siste alternativet gir bare ett mulig tårn hver. For det midterste alternativet bruker han sju brikker: To av høyde 5, og fem av høyde 2. Det er to valg blant de sju for brikkene av høyde 5. Dette resulterer i $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$ muligheter. Til sammen kan han bygge tårnet på 23 forskjellige måter. **A**
- (54) **Oppgave 18 2014/2015.** Alle tillatte veier fra nedre venstre hjørne til diagonalen har lengde lik 5 sidekanter i de små kvadratene. For hver av de fem sidekantene kan du fritt velge å gå til høyre eller opp, så det er i alt $2^5 = 32$ mulige veier. **D**
- (54) **Oppgave 20 2014/2015.** Siden Peter starter med 30 kuler i eskene totalt, og det totale antallet minker med 3 i hvert trekk, må antall kuler i eskene alltid være delelig med 3. Etter hvert trekk legger Peter minst $4 - 3 = 1$ kule tilbake i en eske, så det er ikke mulig å tømme alle eskene. Men Peter kan avslutte spillet med tre kuler slik: Først tar han ti kuler fra eske 10 og legger sju av dem i eske 7. Nå er eske 10 tom, og han rører den ikke mer. Dersom eske 4 har m kuler og eske 7 har n kuler, skriver vi det som (m, n) . Peter kan fullføre spillet slik: $(10, 17) - (14, 10) - (18, 3) - (14, 4) - (10, 5) - (6, 6) - (2, 7) - (6, 0) - (2, 1)$. **C**

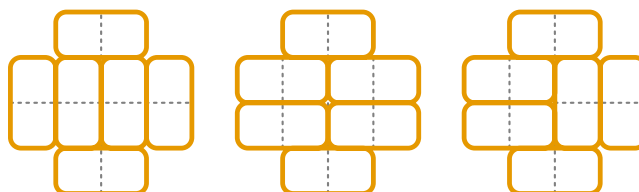


- (55) **Oppgave 4 2015/2016.** Sannsynligheten for at et hvilket som helst tall a_k er odde er $\frac{1}{2}$. Sannsynligheten for at a_1 og a_4 begge er odde, er derfor $\frac{1}{4}$. Så a_1a_4 er odde med sannsynlighet $\frac{1}{4}$, og et partall med sannsynlighet $\frac{3}{4}$. Det samme gjelder a_2a_3 . Differansen er et partall hvis og bare hvis a_1a_4 og a_2a_3 har samme paritet, og det skjer med sannsynlighet $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ E
- (55) **Oppgave 7 2015/2016.** Samme hva summen av de tre første er, vil to av seks mulige utfall for den siste av dem føre til at summen av alle er delelig med 3. (Enten 1 og 4, eller 2 og 5, eller 3 og 6.) Sannsynligheten for dette er $\frac{1}{3}$ C
- (55) **Oppgave 12 2015/2016.** Uansett hvilket kort du trekker fra den første kortstokken er det fire mulige kort i den andre som gir et par med det første. Siden den andre kortstokken inneholder 56 kort, er sannsynligheten for at det skjer $4/56 = 1/14$ C
- (55) **Oppgave 16 2015/2016.** Dette kan gjøres på $\frac{2015 \cdot 2014 \cdots 2001}{15!}$ måter. For heltall $n = 1, 2, \dots, 15$ gjelder at dersom 2^k går opp i $2000 + n$, så går 2^k også opp i n , fordi $k < 4$ og 2^4 går opp i 2000. Det følger at om vi forkorter brøken $\frac{2015 \cdot 2014 \cdots 2001}{15!}$ maksimalt, finnes det ikke igjen en faktor 2 i telleren, så brøken blir et oddetall. E
- (55) **Oppgave 19 2015/2016.** Hvis $A_i = \{m_i, m_i + 1, \dots, n_i\}$, så må $A_{i+1} = \{2m_i + 1, \dots, 2n_i - 1\}$. For det første vil A_{i+1} inneholde alle tallene $m_i + (m_i + 1)$, $m_i + (m_i + 2)$, ..., $m_i + n_i$, $(m_i + 1) + n_i$, $(m_i + 2) + n_i$, ..., $(n_i - 1) + n_i$. Og det er uten videre opplagt at summen av to ulike tall x og y i A_i må oppfylle $2m_i + 1 \leq x + y \leq 2n_i - 1$. Med andre ord er $A_{i+1} = \{m_{i+1}, \dots, n_{i+1}\}$ der $m_{i+1} = 2m_i + 1$ og $n_{i+1} = 2n_i - 1$. Disse to ligningene kan skrives om til $m_{i+1} + 1 = 2(m_i + 1)$ og $n_{i+1} - 1 = 2(n_i - 1)$, og det følger at $m_i + 1 = 2^i(m_0 + 1) = 2^{i+1}$ og $n_i - 1 = 2^i(n_0 - 1) = 3 \cdot 2^i$. Antall forskjellige tall i A_{10} er $n_{10} - m_{10} + 1 = (3 \cdot 2^{10} + 1) - (2^{11} - 1) + 1 = 2^{10} + 3 = 1027$ D
- (56) **Oppgave 3 2016/2017.** Rådhuset og skolen kan hver plasseres i en av fire bydeler, uavhengig av hverandre. Det gir $4 \cdot 4 = 16$ muligheter. For hver av disse er det tre mulige plasseringer av kinoen. I alt er det da $16 \cdot 3 = 48$ muligheter. D

-



- (57) **Oppgave 4 2017/2018.** Konfigurasjonen til venstre i figuren kan roteres 90° , og det samme gjelder den i midten. Den til høyre kan roteres 90° , 180° eller 270° .



Dette er alle mulige måter å dekke figuren på med dominobrikk, og i alt har vi da funnet $2 + 2 + 4 = 8$ konfigurasjoner. D

- (57) **Oppgave 9 2017/2018.** Gustav har nå 13 bøker, og den innbyrdes rekkefølgen av de ti grå bøkene er kjent. Eneste valgmulighet er hvilke av de 13 plassene som skal fylles av de tre nye bøkene. Det er 13 mulige plasser for den røde, deretter 12 mulige plasser for den gule, og til sist 11 mulige plasser for den grønne boken. I alt $13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$ muligheter.

Alternativt velger Gustav først hvilke tre plasser de nye bøkene skal plasseres i, på en av $\binom{13}{3}$ måter, og så velger han rekkefølgen på de tre nye bøkene på en av $3!$ måter. I alt $3! \cdot \binom{13}{3}$ muligheter. D

- (57) **Oppgave 16 2017/2018.** Det første tallet $\binom{10}{5}$ er størst. Årsaken er at dette tallet er antall måter å velge fem ut av ti objekter på. Alle de andre tallene teller også antall måter å velge fem av ti på, men med en eller annen begrensning: For eksempel er $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3}$ antall utvalg der to av de tre første objektene velges, mens tre av de gjenværende sju velges – altså fem av ti, men med tilleggskrav. A

- (58) **Oppgave 18 2017/2018.** Et terningkast av den gitte typen kan spesifiseres slik: Først velges hvilket antall øyne som skal forekomme to ganger. Det kan gjøres på 6 måter. Plassér terningene i rekkefølge etter hvor mange øyne som vises: For eksempel 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6. Så tilordnes de sju fargene til disse terningene. Det kan gjøres på $7!$ måter. Men fordi to terninger viser samme antall øyne, har vi nå telt dobbelt, så vi ender med $6 \cdot 7!/2 = 3 \cdot 7!$ muligheter.

Alternativt kan vi først velge ut hvilke to av terningene som skal ha samme farge. Det kan gjøres på $\binom{7}{2} = 21$ måter. Så kan vi legge til side den ene av de to, og farge de gjenværende terningene på en av $6!$ måter. I alt får vi $21 \cdot 6! = 3 \cdot 7!$ muligheter. D



- (58) **Oppgave 20 2017/2018.** Det finnes $\binom{16}{3} = 560$ tripler av distinkte punkter blant de 16 gitte punktene, men vi kan bare danne 499 trekanter, så punktene i 61 av disse triplene må ligge på linje. Vi vet at enhver linje som inneholder minst tre av de 16 punktene må inneholde minst fire av dem. En slik linje med p punkter vil «bruke opp» $\binom{p}{3}$ av de 61 triplene nevnt foran. Nå kan vi tegne opp den relevante delen av Pascals trekant. Nedenfor er $\binom{p}{3}$ fargelagt, for $p = 4, 5, 6, 7, 8$. For $p > 8$ blir binomialkoeffisienten større enn 61, så det kan ikke finnes linjer med så mange punkter.

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10		5	1
	1	6	15		20		15	6	1
	1	7	21		35		21	7	1
	1	8	28		56		28	8	1

Dersom det finnes n_p linjer med eksakt p punkter, må $4n_4 + 10n_5 + 20n_6 + 35n_7 + 56n_8 = 61$. Vi ser med en gang at $n_8 = 0$. Videre må n_7 være odde og $n_7 < 2$, så $n_7 = 1$, og derfor $4n_4 + 10n_5 + 20n_6 = 26$. $n_6 = 1$ gir ingen løsning, så $n_6 = 0$. Dermed kan vi prøve oss frem og finne at $n_5 = 1$ og $n_4 = 4$ er eneste mulighet. D

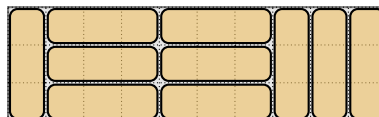
- (58) **Oppgave 1 2018/2019.** Svaret blir $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ D

- (58) **Oppgave 8 2018/2019.** Vi har $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Vi kan klassifisere faktoriseringene etter hvor mange av de fire primfaktorene forekommer i hver av de tre faktorene. Fordelingen $(4, 0, 0)$ går ikke, for da er to av faktorene lik 1, og dermed lik hverandre. $(3, 1, 0)$ gir fire muligheter: én for hvert valg av faktoren som står for seg selv. De andre mulighetene er $(2, 1, 1)$ og $(2, 2, 0)$. $(2, 1, 1)$ gir $\binom{4}{2} = 6$ muligheter: én for hvert valg av de to faktorene som står sammen. Og $(2, 2, 0)$ gir tre muligheter: én for hver av primfaktorene som skal stå sammen med primfaktoren 2. I alt har vi $4 + 6 + 3 = 13$ muligheter. Den fullstendige listen er: $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 7 \cdot 1$, $(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 5 \cdot 1$, $(2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 3 \cdot 1$, $(3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 1$; $(2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 7$, $(2 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 7$, $(2 \cdot 7) \cdot 3 \cdot 5$, $(3 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 7$, $(3 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 5$, $(5 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 3$; $(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 7) \cdot 1$, $(2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 7) \cdot 1$, $(2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 1$ D

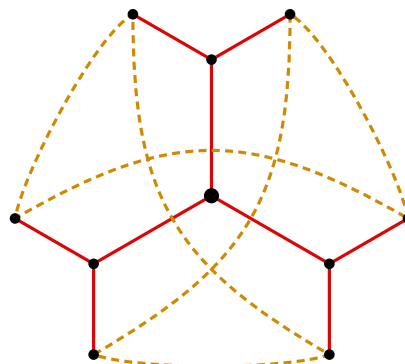
- (58) **Oppgave 11 2018/2019.** Vi kan sette sammen en gruppe på fem på $\binom{13}{5} = 1287$ måter. Men av disse er det $\binom{6}{5} = 6$ kombinasjoner med bare gutter, og $\binom{7}{5} = 21$ kombinasjoner med bare jenter. Så gruppen kan settes sammen på $1287 - 6 - 21 = 1260$ måter. B



- (59) **Oppgave 15 2018/2019.** Vi kan sette noen brikker på tvers. Mellom disse brikkene kan vi ikke annet enn sette brikker tre og tre i lengderetningen over hverandre. Om vi har a brikker på tvers og b slike blokker à tre brikker hver, må vi ha $a + 3b = 10$. Disse kan så plasseres på $\binom{a+b}{b}$ måter. Vi har dermed for $a = 1, b = 3$: $\binom{4}{3} = 4$ muligheter; for $a = 4, b = 2$: $\binom{6}{2} = 15$ muligheter; for $a = 7, b = 1$: $\binom{8}{1} = 8$ muligheter; og for $a = 10, b = 0$: 1 mulighet; tilsammen $4 + 15 + 8 + 1 = 28$ muligheter. ... **A**



- (59) **Oppgave 20 2018/2019.** Start med å se på én by, for eksempel hovedstaden, representert ved den midterste prikken i figuren. Fra hovedstaden er det direkterute til maksimalt tre andre byer, og hver av disse tre byene har direkterute til maksimalt to byer i tillegg til hovedstaden. De heltrukne linjene i figuren viser direkterutene mellom disse ti byene. Det kan altså ikke være flere enn ti storbyer i landet. Om vi legger til direkteruter mellom de seks ytterste byene som vist med de stiplede linjene i diagrammet, er betingelsene oppfylt, så det er mulig at det er så mange som ti byer i landet. ... **C**



- (59) **Oppgave 1 2019/2020.** Det er $7 \cdot 6 \cdot 5$ måter å velge de tre på når rekkefølgen tas i betraktning. Dette må vi dele på antall måter å ordne de tre på: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Da står vi tilbake med $7 \cdot 5 = 35$ muligheter. Fra disse må vi eliminere de utvalgene der både Arne og Berit er med: Det er fem muligheter, siden vi nå bare velger én blant de øvrige fem. Det er nå bare $35 - 5 = 30$ muligheter igjen.

Alternativ for den som kjenner til binomialkoeffisienter: Det er $\binom{7}{3} = 35$ mulige måter å velge tre av sju på. Her også må vi huske å trekke fra 5, med resultat 30. **C**

- (59) **Oppgave 5 2019/2020.** Mynt nummer k (med $k = 1, 2, \dots, 7$) har tallene k og $k + 7$ på de to sidene, så summen av de synlige sidene blir $1 + 2 + \dots + 7 + 7m$, der m er antall mynter med det største tallet opp. Mulighetene for m er 0, 1, ..., 7, altså åtte muligheter i alt. **A**



- (59) **Oppgave 12 2019/2020.** For at Bente skal få gaven med smykket, må hun og Anne bli trukket ut. Det er $6 \cdot 5 = 30$ måter å velge ut to av seks på, når vi tar hensyn til rekkefølgen. I to av disse mulighetene er det Anne og Bente som blir trukket ut. Sannsynligheten for det er da $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

Alternativ løsning: Antall mulige utfall av loddtrekningen er gitt ved binomialkoeffisienten $\binom{6}{2} = 15$, så sannsynligheten er $\frac{1}{15}$ E

- (60) **Oppgave 20 2019/2020.** La g være Gunnars tall, og k være Karl Eriks tall.

G: *Jeg er ikke sikker på hvem som har størst tall, jeg. Vet du?* Av dette kan vi slutte at $2 \leq g \leq 8$. For om $g = 1$, må g være minst, og om $g > 8$, må g være størst.

KE: *Ikke før du sa noe, men nå vet jeg!* Fra første del lærer vi at også $2 \leq k \leq 8$. Men da Karl Erik fant ut at $2 \leq g \leq 8$, visste han hvilket tall som var størst. Altså er $k \neq 4$, for da ville mulighetene for at $g = 2$ eller $g = 8$ begge være åpne. Om $k \in \{2, 3\}$ ville Karl Erik vite at k er minst, og om $k \in \{5, 6, 7, 8\}$ ville han vite at k er størst, så alle disse er fortsatt muligheter.

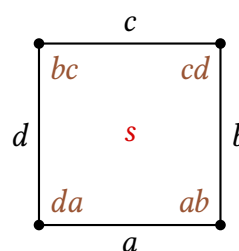
G: *Jeg er fortsatt usikker på hvem som har størst tall, jeg.* Nå vet vi at $g = 4$, fra resonnerementet over. Og da må $k = 2$ eller $k = 8$.

KE: *Det er nå jeg som har det største tallet, da.* Det avgjør saken: $k = 8$, og $g + k = 12$ C

- (60) **Oppgave 5 2020/2021.** Vi kan fargelegge rutene med unntak av øverste høyre hjørne som vi vil. Det gir $2^8 = 256$ muligheter. Da er fargen på det siste hjørnet bestemt, så vi har ikke flere valgmuligheter. C

- (60) **Oppgave 8 2020/2021.** Dersom Nina skriver -1 på enten 0, 1, 3 eller 4 sider, blir tallet i midten henholdsvis 8, 2, -2 eller 0. (Det er bare ett tilfelle av hver type.) Men dersom hun skriver -1 på *to* sider, kan hun gjøre det på to måter. Om hun skriver -1 på motsatte sider, får hun -4 i midten, men om de er nabosider, er resultatet 0. Blant de seks mulighetene forekommer bare én verdi (0) to ganger, så vi står tilbake med fem mulige tall i midten.

Alternativ løsning: Om tallene på sidene er a, b, c, d som i figuren, blir tallet s i midten av kvadratet $s = (a + c) + (b + d) + (a + c)(b + d) = x + y + xy = (1 + x)(1 + y) - 1$, der $x = a + c$ og $y = b + d$. Men $1 + x$ og $1 + y$ kan velges uavhengig av hverandre, med mulige verdier $-1, 1$ og 3 . Produktet av to av disse må bli en av $-3, -1, 1, 3$ eller 9 , så s må være en av $-4, -2, 0, 2$ eller 8 A

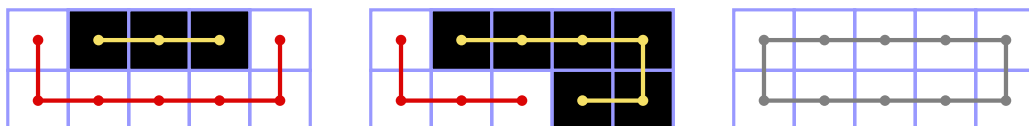




- (61) **Oppgave 13 2020/2021.** Det finnes i alt $\binom{40}{6} = \frac{40!}{6!34!}$ utvalg på seks kort blant de 40. Av disse omfatter $40 - 5 = 35$ utvalg alle de gylne kortene, så svaret blir $35 / \frac{40!}{6!34!} = \frac{6!35!}{40!}$ **D**
- (61) **Oppgave 17 2020/2021.** Herman kan sette sammen $3^3 = 27$ menyer helt uten sviske. Med sviske inkludert kan han velge tidspunkt for grøt med sviske på tre måter. For hver av disse har han så 3^2 muligheter for de to andre rettene, altså $3 \cdot 3^2 = 27$ muligheter også her. Tilsammen har han $27 + 27 = 54$ menyer å velge mellom. **D**
- (61) **Oppgave 19 2020/2021.** Vi kan velge ut tre av tallene 1, 2, ..., 2022 på $\binom{2022}{3}$ måter. Men vi kan også telle opp mulighetene slik: Om det midterste av tallene er k , kan vi velge det minste på $k - 1$ måter, og det største på $2022 - k$ måter. Det gir $(k - 1)(2022 - k)$ muligheter for hver k . Summen i oppgaven er summen av disse tallene for $k = 2, 3, \dots, 2021$. ($k = 1$ og $k = 2022$ gir ingen muligheter.) **A**
- (61) **Oppgave 1 2021/2022.** Szymon har 13 valg av forret. For hvert av disse valgene, kan han velge en av 12 hovedretter. I alt $13 \cdot 12 = 156$ muligheter. ... **E**
- (61) **Oppgave 3 2021/2022.** Mulighetene med ett siffer er 0, 6 og 9. Med to siffer kan vi få til 77, 14 og 41. Med tre siffer kan vi få til 111. Flere muligheter finnes ikke. Summen av disse tallene er 258. **D**
- (62) **Oppgave 4 2021/2022.** Vi multipliserer det første kjøpet med 3, og det andre med 2: Ni epler, tolv bananer og seks pærer koster da 189 kroner, mens ti epler, tolv bananer og seks pærer koster 194 kroner. Derfor koster ett eple $194 - 189 = 5$ kroner, og vi kan få kjøpt $120/5 = 24$ epler for 120 kroner. . **C**
- (62) **Oppgave 5 2021/2022.** Det er 6^3 mulige utfall når du kaster tre terninger. For at produktet skal bli et *oddetall*, må alle terningene gi oddetall. Det kan skje på 3^3 måter. Sannsynligheten for å få oddetallsprodukt, er derfor $3^3/6^3 = (\frac{3}{6})^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Sannsynligheten for å få et partallsprodukt er så $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ **E**
- (62) **Oppgave 12 2021/2022.** Marthe starter andre og tredje leseøkt på to forskjellige sider fritt valgt fra de siste 49 av de 50 sidene som står igjen. Disse to sidene kan hun velge på $\frac{49 \cdot 48}{2} = 1176$ måter. **C**



- (62) **Oppgave 16 2021/2022.** Johannes vinner hver runde med sannsynlighet $\frac{2}{3}$. Det tar alltid minst to runder før noen vinner leken. Etter to runder er det bare tre mulige utfall: (1) Johannes vinner begge rundene, og dermed leken. Det skjer med sannsynlighet $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. (2) Pål vinner begge rundene, og dermed leken. Det skjer med sannsynlighet $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. (3) De vinner en runde hver, og ender med ett poeng hver. Det skjer med sannsynlighet $1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$. Da er det tilbake til utgangspunktet, med poengdifferanse null. Skriv p for sannsynligheten for at Johannes vinner. Da er $p = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}p$ (dersom Johannes vinner, vinner han etter to runder, eller det er uavgjort, og så vinner han det videre spillet). Løsningen av ligningen er $p = \frac{4}{5}$ C
- (63) **Oppgave 18 2021/2022.** Du må ha tatt bort $3j$ terninger til venstre for den første av de to terningene du har igjen til slutt, og $3k$ terninger mellom de to, der j og k er heltall. (Du har da tatt vekk $48 - 3j - 3k = 3 \cdot (16 - j - k)$ terninger til høyre for de to.) Det betyr at den første av de to terningene hadde opprinnelig posisjon $3j+1$, mens den andre hadde opprinnelig posisjon $3j+1+3k+1 = 3(j+k)+2$. Da viste den første terningen 1 (hvis j er et partall) eller 4 (hvis j er et oddetall), mens den andre viser 2 (hvis $j+k$ er et partall) eller 5 (hvis $j+k$ er et oddetall). Alle disse kan forekomme i kombinasjon, så mulige utfall er $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(4, 2)$ eller $(4, 5)$ D



Litt mer detaljert om hvorfor vi kan tenke slik: Anta at to ruter over hverandre, men ikke ytterst på enden, har samme farge, for eksempel svart. Da må alle rutene til venstre for disse, eller alle rutene til høyre, også være svarte. Det betyr at slike stabler med to likt fargede ruter oppå hverandre bare kan opptre på venstre eller høyre ende, med en eller flere slike stabler ved siden av hverandre. Mellom disse ensfargede stablene på hver side må vi alltid ha svart øverst, hvitt nederst, eller alltid omvendt. (Bildet til høyre i oppgaven illustrerer hvorfor.) Slik ser vi altså at bildene over er ganske representative.

- (63) **Oppgave 5 2022/2023.** Det er i alt $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ mulige sokkepar Pål kan trekke ut av skuffen. Av disse er det $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ blå, $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ røde og $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ gule sokkepar, i alt 19 ensfargede sokkepar. Så sjansen for et ensfarget sokkepar er $\frac{19}{66}$ E
- (64) **Oppgave 7 2022/2023.** Naborom har alltid motsatt paritet: Naboene til et oddetallsrom har partallsnummer, og omvendt. Siden rotta startet i et oddetallsrom og flytter seg et partalls antall ganger, må den nødvendigvis ende opp i et oddetallsrom igjen, altså en av nodene 1, 3, eller 5. Alle disse er mulige. For eksempel kan rotta gå frem og tilbake mellom rom 1 og 2, og altså alltid være i node 1 etter et jevnt antall steg. Men den kan også gjøre det til og med steg 2020, og deretter gå til rom 4 og så til rom 3 eller 5. Så alle de tre mulighetene er åpne. B



- (64) **Oppgave 10 2022/2023.** Herman kan først velge to av seks plasser i tårnet for de røde klossene. Det kan han gjøre på $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ måter. Så kan han velge to av de fire gjenværende plassene for de blå klossene. Det kan han gjøre på $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ måter. I alt har han $15 \cdot 6 = 90$ muligheter. E
- (64) **Oppgave 14 2022/2023.** Det første av fire sifre kan velges på ni måter (det kan ikke være null). Da kan det andre sifferet som finnes i tallet, velges fritt blant de øvrige ni sifrene (inkludert null). Til slutt finnes det $2^3 = 8$ måter å lage de siste tre sifrene på med de to som nå er valgt, men en av de åtte måtene (alle siffer lik det første) er ikke tillatt, så det er bare sju valg igjen. I alt har vi $9 \cdot 9 \cdot 7 = 567$ muligheter. B
- (64) **Oppgave 19 2022/2023.** Et rektangel i figuren bestemmes entydig ved å velge to av de sju vertikale linjene og to av de horisontale linjene. Hvert av de to valgene har $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ muligheter, så det er i alt 21^2 rektangler.
- La de to vertikale sidene i et rektangel ligge på vertikal linje nummer a og b , der a og b er heltall med $1 \leq a < b \leq 7$.
- For at rektangelet skal inneholde et skyggelagt kvadrat, må $b > 3$ og $a < 5$. Det gir fire muligheter hver for a og b , totalt 16 muligheter, men vi må fjerne tilfellet $a = b = 4$, så det er bare 15 muligheter for (a, b) . På samme måte kan de horisontale sidene velges på 15 måter, så 15^2 rektangler inneholder minst ett skyggelagt kvadrat.
- Antall rektangler som ikke gjør det, er da $21^2 - 15^2 = (21 - 15)(21 + 15) = 6 \cdot 36 = 216$ A
- (64) **Oppgave 3 2023/2024.** Nils kan velge chili som nummer 1 eller 2, altså to muligheter. Han kan velge appelsin som nummer 4 eller 5, også det to muligheter. Da gjenstår det tre sjokolader, og når han har bestemt den innbyrdes rekkefølgen på de tre ($3! = 6$ muligheter), er alt bestemt. I alt blir det $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ mulige rekkefølger, siden de tre valgene kan gjøres uavhengig av hverandre. D
- (65) **Oppgave 5 2023/2024.** Etter at Nils tok ut to høyresko, er det igjen seks sko i skapet, hvorav fire venstresko. Sannsynligheten for at den neste skoen han tar, er en venstresko, er altså $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Gitt at det går bra, er det nå tre venstresko blant de siste fem skoene, så sannsynligheten for at han får en venstresko til, er $\frac{3}{5}$. Sannsynligheten for at han trekker to venstresko, og dermed ender opp med to par, er $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ A



- (65) **Oppgave 7 2023/2024.** Helene må veksle mellom polsk og ukrainsk, så hun har bare to måter å fordele språk på: Den ene starter med polsk, og den andre starter med ukrainsk. For hvert av de to valgene kan hun velge rekkefølgen på de polske bøkene på $5! = 120$ ganger, og likeledes har hun 120 rekkefølger for bøkene på ukrainsk. Det gir i alt $2 \cdot 120 \cdot 120 = 28800$ mulige rekkefølger.

..... D

- (65) **Oppgave 10 2023/2024.** Tvillingene til de 20 som spilte fotball alle dagene, må ha gått tur alle dagene. Tar vi bort disse tvillingparene, står vi igjen med 120 elever (60 tvillingpar) som valgte en aktivitet en av dagene, og den andre aktiviteten de to andre dagene. Det betyr at nøyaktig en tvilling i hvert av de 60 tvillingparene spilte fotball nøyaktig to av dagene. E

- (65) **Oppgave 19 2023/2024.** Arne kan velge ett av $25 - 3 = 22$ mulige tidsintervall, med start fra kl 00, 01, ..., 21. Tilsvarende har Berit $25 - 4 = 21$ mulige valg, mens Camilla har $25 - 7 = 18$ mulige valg. Det totale antallet mulige utfall er $22 \cdot 21 \cdot 18$.

Vi må telle opp antall utfall som ikke leder til kollisjoner. Et eksempel viser hvordan vi kan representere et slikt utfall: Se på strengen ****B****AC******. Den tolker vi slik: Fra midnatt er det to ledige timer (**), så kommer Berits fire timer, så fire ledige timer (****), så Arne og Camilla rett etter hverandre ($3 + 7 = 10$ timer), og til sist er det fire ledige timer til før midnatt. Enhver streng med ti stjerner pluss de tre symbolene A, B og C én gang hver gir en løsning. Det er i alt $13 \cdot 12 \cdot 11$ måter å plassere de tre bokstavene på blant de 13 symbolene i en slik streng.

Den søkte sannsynligheten blir $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{22 \cdot 21 \cdot 18} = \frac{13}{63}$. (Livet blir mye vanskeligere om du ganger ut teller og nevner før du prøver å forenkle brøken.) D

- (66) **Oppgave 3 2024/2025.** Hvis Nils trekker 25 sokker, risikerer han å ende opp med 20 svarte og bare fem hvite sokker. Men trekker han 26 sokker, er han sikker, for blant de 26 sokkene er det høyst 20 svarte, så det er minst seks hvite. Og det er høyst 16 hvite, så det er minst ti svarte. D

- (66) **Oppgave 8 2024/2025.** Spør i stedet: Hvor mange lapper kan du maksimalt trekke *uten* å ha tre som slutter på samme siffer? Svaret er 20 lapper: To som ender på 0, to som ender på 1, og så videre. Med 21 lapper er du sikker. ... D



- (66) **Oppgave 15 2024/2025.** Om vi roterer sjakkbrettet 180 grader, kommer hvite ruter der det var hvite ruter fra før. Siste rute, med tallet 64, havner der første rute, med tallet 1, var. Summen av de to er 65. Det samme skjer med de neste hvite rutene: $3 + 62 = 65$, og så videre. Så to ganger summen er $32 \cdot 65$, og summen vi søker, er $16 \cdot 65 = 1040$.

Alternativ løsning: Del inn sjakkbrettet i mindre kvadrater, der hvert kvadrat er 2×2 ruter. I et slikt småkvadrat er summen av tallene i de to hvite rutene lik summen av tallene i de to svarte rutene, så tallene i de hvite rutene har samme sum som tallene i de svarte, og derfor halve summen av alle tallene på brettet, altså $\frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \dots + 64) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 65}{2} = 16 \cdot 65 = 1040$ C

- (66) **Oppgave 16 2024/2025.** La oss måle tid i timer fra midnatt, og vinkler med klokka fra rett opp. Ved tidspunkt t kan vi si at timeviseren står i vinkel $t \cdot 30^\circ$, og minuttviseren i vinkel $t \cdot 360^\circ$. (Vinkler større enn 360° kan reduseres til noe mellom 0° og 360° ved å trekke fra et heltallig multiplum av 360° , men her foretrekker vi å ikke gjøre det.) Vinkelen mellom de to viserne er så $t \cdot 360^\circ - t \cdot 30^\circ = t \cdot 330^\circ$, og viserne står vinkelrett på hverandre hver gang $t \cdot 330^\circ = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$ for et heltall n . Det skjer så hver $\frac{180}{330} = \frac{6}{11}$ time. I løpet av 24 timer har det skjedd $24 / \frac{6}{11} = 44$ ganger.

Alternativ løsning: I løpet av ett døgn går minuttviseren 24 hele runder, og timeviseren to runder i samme retning. Det betyr at minuttviseren går $24 - 2 = 22$ runder sett fra timeviserens synspunkt. Den står vinkelrett på timeviseren to ganger per runde, i alt 44 ganger.

Mulig alternativ løsning: I hver time, fra og med helt klokkeslett til neste hele klokkeslett, står urviserne vinkelrett på hverandre to ganger. (Dette er sant, men er ikke fullt så opplagt som man skulle tro, ettersom det går litt over en halvtime mellom hver gang dette skjer.) Det skulle bli $2 \cdot 24 = 48$ ganger i alt i en 24-timers periode.. Men to ganger i hver 12-timers periode, nemlig klokka tre og ni, skjer det på hel time. Så disse to (fire om vi tar hele døgnnet) er tatt med to ganger hver, så vi må trekke fra fire, og ender med 44 som svar. . . D

- (67) **Oppgave 20 2024/2025.** Skriv R, G, B, S for verdien av henholdsvis den røde, grønne, blå, eller svarte terningen. Til hvert terningkast (R, G, B, S) kan vi tilordne et «motsatt» terningkast $(R', G', B', S') = (5 - R, 21 - G, 13 - B, 13 - S)$. Så er $R + G < B + S$ hvis og bare hvis $R' + G' > B' + S'$. (Dette gjelder fordi $5 + 21 = 13 + 13$.) Det er altså akkurat like mange terningkast med $R + G < B + S$ som det er terningkast med $R + G > B + S$.

La oss telle opp antall terningkast med $R + G = B + S = n$, for $n = 2, 3, \dots, 24$:

Ettersom $R' + G' = 26 - (R + G)$ og $B' + S' = 26 - (B + S)$, er antallet det



samme for $n = 24, 23, \dots, 14$ som det er for $n = 2, 3, \dots, 12$.

BS: For $n = 2, 3, \dots, 13$ har vi $n - 1$ muligheter for (B, S) med $B + S = n$ (gitt ved $B = 1, 2, \dots, n - 1$ og $S = n - B$).

RG: Likeledes, for $n = 2, 3$ og 4 har vi $n - 1$ muligheter for (R, G) med $R + G = n$; men for $n = 5, \dots, 13$ har vi bare fire muligheter (gitt ved $R = 1, 2, 3, 4$ og $G = n - R$).

For hver n må vi gange sammen tallene vi kom frem til i avsnittene **BS** og **RG**: Antall muligheter totalt for $R + G = B + S < 13$ er da $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (4 + 5 + \dots + 11) = 14 + 4 \cdot 60 = 254$.

Symmetrien mellom (R, G, B, S) og (R', G', B', S') gir oss $2 \cdot 254 = 508$ muligheter for $R + G = B + S \neq 13$. Legger vi så til $4 \cdot 12 = 48$ muligheter for $n = 13$, har vi totalt 556 muligheter for $R + G = B + S$.

Alt i alt er det $4 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 12 = 80 \cdot 144$ mulige utfall, og $80 \cdot 144 - 556$ av disse har $R + G \neq B + S$. Av disse vil halvparten oppfylle $R + G < B + S$, i alt $40 \cdot 144 - 278 = 5482$ utfall. **D**



Tallteori

- (68) **Oppgave 20 2005/2006.** For at $184n = 2^3 \cdot 23 \cdot n$ skal være et kvadrattall, må alle primfaktorene i produktet forekomme i partallspotens. Det minste tallet n som sørger for dette, er $2 \cdot 23 = 46$, for da blir $184n = 2^4 \cdot 23^2$ **D**
- (68) **Oppgave 1 2006/2007.** Alle tallene er delelige med 5. Det eneste av tallene som ikke er delelig med 3, er 230. **B**
- (68) **Oppgave 16 2006/2007.** Siste siffer i produktet av to tall er lik siste siffer i produktet av siste siffer i de to tallene. Siste siffer i 2007^n vil følge mønsteret 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, ... når vi starter med $n = 0$ og lar n vokse med én om gangen (hvert tall i denne følgen unntatt det første er siste siffer i produktet av 7 og tallet foran). Når n er delelig med 4, er 1 siste siffer i 2007^n . Her er eksponenten $n = 2006^{2005}$, som er delelig med 4, da 2006 er delelig med 2 og dermed 2006^k delelig med 4 for alle $k \geq 2$ **A**
- (68) **Oppgave 20 2006/2007.** La de ukjente sifrene være a, b, c og d i rekkefølge fra venstre til høyre. Fordi $92 \cdot 39 < 92 \cdot 40 = 3680 < 3906$, er $c \leq 2$. Fordi produktet slutter på 6, er 6 siste siffer i $2b$, så $b = 3$ eller $b = 8$. La $A = 10a + 2$ være første tall på venstre side. Vi tar først for oss tilfellet $c = 1$. Da er $50 = 1900/38 < 1906/38 \leq A \leq 1996/33 < 2013/33 = 61$, slik at $A = 52$. $52 \cdot 33 = 1716$ passer ikke med høyre side, mens $52 \cdot 38 = 1976$ er en løsning. Vi tar så for oss $c = 2$. Da er $75 = 2850/38 < 2906/38 \leq A \leq 2996/33 < 3003/33 = 91$, slik at $A = 82$. Men verken $82 \cdot 33 = 2706$ eller $82 \cdot 38 = 3116$ passer med høyre side. Så regnestykket var $52 \cdot 38 = 1976$ **E**
- (68) **Oppgave 2 2007/2008.** Fordi det blir 4 til overs når de deles i grupper på 5, er det 4, 9, 14, 19, 24 eller 29 barn. Av disse mulighetene er det bare 19 som gir 3 til overs når barna deles i grupper på 4. Når de 19 deles i grupper på 6, blir det 1 til overs. **A**
- (68) **Oppgave 3 2007/2008.** Hvis Ola spiste et odde antall epler mandag og fredag, spiste han et jamt antall tirsdag og torsdag og et odde antall onsdag, altså et odde antall totalt. Så han spiste et jamt antall mandag og fredag. Spiste han 2 mandag og fredag, kom han ikke opp i 18 på ei uke, og spiste han 6 eller flere mandag og fredag, spiste han flere enn 18. Så han spiste 4 epler mandag og fredag, og dermed 3 eller 5 tirsdag. Spiste han 5 tirsdag, spiste han minst 20 (4–5–4–3–4), så han spiste 3 tirsdag (4–3–4–3–4). **B**



- (69) **Oppgave 8 2007/2008.** Hvis Kari kjøpte b porsjoner burritos, må det kaffen kostet, $1000 - 172b$, være delelig med 20. Dermed må også $172b$ være delelig med 20, som gjør at b må være delelig med 5. Eneste mulighet er $b = 5$ ($b \geq 10$ gir totalpris større enn 1000). Kari kjøpte $(1000 - 172 \cdot 5)/20 = 7$ kopper kaffe. E
- (69) **Oppgave 18 2007/2008.** La a være lengden av kateten og b lengden av hypotenusen. Da er $3^6 = 27^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, som gir primtallsfaktoriseringen av $(b - a)(b + a)$. Fordi $b - a < b + a$, er $(b - a, b + a)$ lik $(1, 3^6)$, $(3, 3^5)$ eller $(3^2, 3^4)$, som gir henholdsvis 364, 120 eller 36 for $a = (-(b - a) + (b + a))/2$. C
- (69) **Oppgave 19 2007/2008.** $77 = BA + B^2 + (A + B)C = B(A + B) + (A + B)C = (A + B)(B + C)$. Fordi 77 er produktet av de to primtallene 7 og 11, må $A + B$ og $B + C$ være 7 og 11. Prisen for én appelsin, to bananer og én klementin er $A + 2B + C = (A + B) + (B + C) = 7 + 11 = 18$ C
- (69) **Oppgave 4 2008/2009.** Siste siffer i antall sukkertøy er 1 eller 6, fordi det blir 1 til overs når de deles på 5. Men antallet er delelig på 4, og da kan ikke siste siffer være 1 (et oddetall er ikke delelig på et partall). Tallene under 60 med 6 som siste siffer og som er delelig på 4, er 16, 36 og 56. Av disse er det bare 16 som gir 1 til overs når vi deler på 3. Hvis 16 deles på 7, blir det 2 til overs. B
- (69) **Oppgave 12 2008/2009.** Antall nuller bakerst i tallet er største k som er slik at tallet er delelig på 10^k , altså den minste av multiplisiteten (antall ganger et tall forekommer som primfaktor) av 2 og multiplisiteten av 5 som primfaktorer til tallet. Multiplisiteten av 5 er 12 (5 er primfaktor i de ti tallene 5, 10, ..., 50, og har multiplisitet 2 som primfaktor i 25 og i 50), mens multiplisiteten av 2 er større (det er 26 partall i produktet i oppgaven). E
- (70) **Oppgave 15 2008/2009.** De fire tallene er fire av tallene 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004 og 2008, som er de positive heltallene som går opp i 2008. Det største av de fire tallene er høyst 251, for 502 sammen med de tre minste – 1, 2 og 4 – gir et for stort produkt. Det største tallet kan ikke være 8 eller mindre, for da blir produktet for lite. Så det største tallet er 251. De tre andre er tre tall blant 1, 2, 4 og 8 som har produkt 8, altså 1, 2 og 4. Summen er $1 + 2 + 4 + 251 = 258$ A
- (70) **Oppgave 18 2008/2009.** $12n + 100 = 3(4n + 1) + 97$. Fordi $4n + 1$ går opp i $12n + 100$, går $4n + 1$ også opp i 97. Men 97 er et primtall, så den eneste muligheten når n skal være et positivt heltall, er $4n + 1 = 97$, altså $n = 24$. A
- (70) **Oppgave 2 2009/2010.** $512 = 2^9 = 8^3$. Begge mulighetene gir $x + y = 11$. .. E



- (70) **Oppgave 7 2009/2010.** Fordi produktet har 9 som siste siffer og den andre faktoren har 1 som andre siffer, er siste siffer i første faktor 9, $49 \cdot \square 1 = 2\square 09$. De eneste mulighetene for første siffer i andre faktor som gir et produkt mellom 2000 og 3000, er 4, 5 eller 6, og det eneste av disse som stemmer overens med produktet, er 4, som gir $49 \cdot 41 = 2009$. (Alternativt kan en tenke seg multiplikasjonsstykket satt opp på vanlig måte, og innse at hvis x er det gjenværende ukjente sifferet på venstre side, så må $4 + 9x$ ha 0 som siste siffer, altså må $9x$ ha 6 som siste siffer, og $x = 4$.) Summen av de tre sifrene er $9 + 4 + 0 = 13$ **B**
- (70) **Oppgave 10 2009/2010.** La de to tallene være x og y . Da er $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 10^2 - 2 \cdot 13 = 74$ **C**
- (70) **Oppgave 11 2009/2010.** Fra og med 1 til og med 33 er det 11 tall som er delelig med 3 og 3 tall som er delelig med 11, men da har vi regnet ett tall (33) to ganger, så det er bare 13 slike tall. Fra og med 34 til og med 66 er det 13 slike tall til, siden $33 + n$ er delelig med 3 eller 11 hvis og bare hvis n er det. Det 26. tallet i følgen er dermed $33 + 33 = 66$. Det største tallet mindre enn 66 som er delelig med 3 eller 11 er 63. **B**
- (71) **Oppgave 15 2009/2010.** Siste siffer i a_n er siste siffer i $2s + 1$, der s er siste siffer i a_{n-1} . Sistesifrene i $a_1, a_2, \dots$ følger dermed mønsteret 1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5, ... og gjentar seg i en periode på 4. Når n gir rest 1 ved divisjon med 4, som 2009 gir, er 1 siste siffer i a_n **A**
- (71) **Oppgave 20 2009/2010.** La n være antall dager siden nyttårsaften. Da er $n - 1$ delelig med 11, så $k = (n - 1)/11$ er et heltall, og vi kan skrive $n = 11k + 1$. Videre er $n - 2 = 11k - 1 = 10k + k - 1$ delelig med 5, så $k - 1$ er delelig med 5, og $k = 5l + 1$ for et heltall l . Vi kan nå skrive $n = 11(5l + 1) + 1 = 55l + 12$. Og $n - 3 = 55l + 9 = 56l + 7 - (l - 2)$ er delelig med 7, så $l - 2$ er delelig med 7, og $l = 7m + 2$ for et heltall m . Nå kan vi skrive $n = 55(7m + 2) + 12$. Bare $m = 0$ gir et positivt heltall mindre enn eller lik 365, nemlig $n = 122$, som er antall dager siden nyttårsaften. I de fire første månedene er det 120 dager, så datoen er 2. mai. **D**
- (71) **Oppgave 6 2010/2011.** Anta at $n^2 + 9 = k^2$, der k er et positivt heltall. Dette er tilfelle nøyaktig når $9 = k^2 - n^2 = (k - n)(k + n)$, altså når $(k - n, k + n)$ er $(1, 9)$, $(3, 3)$ eller $(9, 1)$, altså når $2n = (k + n) - (k - n)$ er 8, 0 eller -8 , det vil si når n er lik 4, 0 eller -4 **D**



- (71) **Oppgave 11 2010/2011.** Det er umulig å gi 1, 2, 4 og 7 kroner. Det er mulig å gi 3, 5, 6, 8, 9 og 10 kroner – dermed også ethvert høyere beløp, for eksempel ved å gi et antall trekronemynter i tillegg til 8, 9 eller 10 kroner. **B**
- (71) **Oppgave 12 2010/2011.** Hvis $m^2 = 329 - mn$, så er $m(m + n) = m^2 + mn = 329 = 7 \cdot 47$. Hvis m og n er heltall større enn 1, må $m = 7$ og $m + n = 47$, så $n = 40$, og $mn = 7 \cdot 40 = 280$ **D**
- (71) **Oppgave 14 2010/2011.** Hvis $n(n - 1)$ er delelig med $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, er n eller $n - 1$ delelig med 67, siden 67 er et primtall. De minste mulighetene for n er derfor $n = 67, 68, 134$ eller 135 . Men på samme måte er n eller $n - 1$ delelig med 5, så det utelukker de tre første mulighetene. Derimot er $135 \cdot 134 = (5 \cdot 3 \cdot 9) \cdot (67 \cdot 2) = 9 \cdot 2010$ **D**
- (72) **Oppgave 18 2010/2011.** Hvis de deler med 2, 10 og 30, får de 1005, 201 og 67, som har sum 1273. Hvis de deler med 3, 5 og 10, får de 670, 402 og 201, som også har sum 1273. Summen av de tre tallene de deler med blir 42 i det første tilfellet og 18 i det andre. Så ut fra opplysningene i oppgaven er det umulig å avgjøre summen av tallene de deler med. **E**
- (72) **Oppgave 1 2011/2012.** Alle heltall mindre enn 100 som er delelige på 3 er på formen $3k$ der $k = 1, 2, \dots, 33$. Av disse tallene er de hvor k er et oddetall ikke delelige på 2. Det gir totalt 17 muligheter. **B**
- (72) **Oppgave 6 2011/2012.** Om m, n og p er tre av de utvalgte tallene, så er $m + p = 12u$ og $n + p = 12v$ der u og v er heltall. Da er $m - n = (m + p) - (n + p) = 12(u - v)$, så $m = n + 12(u - v)$, og derfor har m og n samme rest etter divisjon med 12. Med andre ord vil alle de utvalgte tallene ha samme rest etter divisjon med 12, la oss si r . Summen av to av disse har formen $(12k + r) + (12k' + r) = 12(k + k') + 2r$, som er delelig med 12 hvis og bare hvis $r = 0$ eller $r = 6$ (siden $0 \leq r \leq 11$). Dersom Nils velger fler enn to tall kan han bare velge dem alle blant tallene $12k$ for $k = 1, \dots, 16$, eller alle blant $12k + 6$ for $k = 0, \dots, 16$. Det maksimale antallet blir 17. **B**
- (72) **Oppgave 10 2011/2012.** Om vi skriver $2011^{2012} = (2010 + 1)^{2012}$ og ganger ut så vil alle leddene som inneholder 2010 i en potens 2 eller høyere ende på to nuller, og dermed ikke bidra til de to siste sifrene i svaret. Kaster vi bort disse leddene står vi igjen med $2012 \cdot 2010^1 \cdot 1^{2011} + 2010^0 \cdot 1^{2012} = 2012 \cdot 2010 + 1$, som ender med 21. **B**



- (72) **Oppgave 15 2011/2012.** Vi har $1007^4 - 1005^4 = (1007^2 - 1005^2) \cdot (1007^2 + 1005^2) = (1007 - 1005) \cdot (1007 + 1005) \cdot ((1006 + 1)^2 + (1006 - 1)^2) = 2 \cdot 2012 \cdot 2 \cdot (1006^2 + 1) = 2012 \cdot (2012^2 + 4) = (2011 + 1) \cdot ((2011 + 1)^2 + 4)$. Når vi ganger ut og kaster vekk heltallige multipler av 2011, står vi tilbake med 5. **B**
- (72) **Oppgave 20 2011/2012.** Faktoren 2 opptrer mer enn $2 + 4 + 6 + \dots + 98 = 2450$ ganger i produktet. Faktoren 5 opptrer én gang i hvert femte tall, pluss en ekstra gang i 25, 50 og 75, så den forekommer i alt $5 + 10 + \dots + 95 + 25 + 50 + 75 = 1100$ ganger i produktet. Siden det er færre femmere enn toere blant faktorene, er svaret 1100. **E**
- (72) **Oppgave 4 2012/2013.** Primtallsfaktoriseringen av 360 er $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. De forskjellige primtallsfaktorene er 2, 3 og 5. **B**
- (73) **Oppgave 6 2012/2013.** Primtallsfaktoriseringen av 784 er $784 = 2^4 \cdot 7^2$. For at n skal gå opp i 784, må $n = 2^i \cdot 7^j$ med $0 \leq i \leq 4$ og $0 \leq j \leq 2$. Det gir 5 muligheter for i og 3 muligheter for j , i alt $5 \cdot 3 = 15$ muligheter. **D**
- (73) **Oppgave 12 2012/2013.** Skriv tre påfølgende tall som $n-1$, n og $n+1$. Summen av disse tre er $3n$. Dette er et primtall bare når $n = 1$, som gir primtallet 3. **B**
- (73) **Oppgave 17 2012/2013.** Tallet n kan ikke være 2000 eller større, for da vil andre siffer være null, slik at også produktet av sifrene blir null, mens summen ikke er det. Vi forsøker oss med et tall med sifre 1, a , b , c i rekkefølge. De må tilfredsstille ligningen $abc = 1 + a + b + c$. Med $a = b = c = 2$ blir $abc > 1 + a + b + c$, og hver gang vi øker en av variablene vil abc øke mer enn $1 + a + b + c$, så ulikheten bare øker. Derfor må minst ett til av sifrene være 1. La oss si $c = 1$. Da må $ab = 2 + a + b$. Hvis $a = b = 3$ blir $ab > 2 + a + b$, og et argument likt det foran viser at minst en av a , b – la oss si b – høyst kan være lik 2. Setter vi $b = 1$, må vi ha $a = 3 + a$, som er umulig. Setter vi $b = 2$, må vi ha $2a = 4 + a$, så $a = 4$. Tallet n er 1421, og summen av sifrene er 8. **E**
- (73) **Oppgave 19 2012/2013.** Siste siffer i et produkt avhenger bare av siste siffer i faktorene. Dette gjør det enkelt å regne ut siste siffer i 2^n for alle n : For $n = 1$, 2, ... blir resultatet 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... der mønsteret 2, 4, 8, 6 gjentar seg i det uendelige. Siste siffer i 2012^{2012} er det samme som i 2^{2012} , som er det samme som i 2^4 , altså 6. Det samme skjer for 3^n , med mønsteret 3, 9, 7, 1. Siste siffer i 503^{503} er det samme som i 3^{503} , som er det samme som i 3^3 , altså 7. Produktet av tall med siste siffer 6 vil selv ha siste siffer 6, og det gjelder da også 1006^{1006} . Man finner siste siffer i en sum ut fra siste siffer i summandene ved å addere sistesifrene og ta siste siffer i resultatet, så siste siffer i summen det spørres etter er lik siste siffer i $1 + 4 + 6 + 7 + 6 + 6 = 30$, det vil si 0. **A**



- (73) **Oppgave 1 2013/2014.** Siden 2 er et primtall, vil bare potenser av 2 gå opp i 2^{10} . Altså 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{10} – i alt 11 tall. **D**
- (73) **Oppgave 8 2013/2014.** Som i titallsystemet tilegner vi vekter til hvert siffer. I titallsystemet er vektene 1, 10, 10^2 , 10^3 og så videre, regnet fra høyre. I tretallsystemet er vektene 1, 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ og så videre. Så 1021 i tretallsystemet svarer til $1 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 34$ **C**
- (73) **Oppgave 13 2013/2014.** Produktet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 10$ inneholder faktoren $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$, så ethvert multiplum av dette må ende i to nuller. **A**
- (74) **Oppgave 16 2013/2014.** Siste siffer i et produkt avhenger bare av siste siffer i faktorene. Anta at a og a^2 har samme sistesiffer. Da vil $a^3 = a^2 \cdot a$ også ha dette sistesifferet. Det samme gjelder $a^4 = a^3 \cdot a$, og så videre, så alle potenser a^n med $n \geq 1$ har samme sistesiffer. Siden $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ og $4^2 = 16$ (sistesiffer $6 \neq 4$), mens $5^2 = 25$, er 5 første tall med egenskapen vi søker. **B**
- (74) **Oppgave 20 2013/2014.** Kvadrattallene mellom 2013 og 3602 er $45^2 = 2025$, 46^2 , ..., $60^2 = 3600$, men vi skal bare telle de av dem som gir rest 4 etter divisjon med 7. Et tall på formen $7m + n$ med $n = 0, 1, \dots, 6$ har kvadrat $(7m + n)^2 = 7 \cdot (7m^2 + 2mn) + n^2$, så resten etter divisjon med 7 avhenger bare av n . Ved å sjekke mulighetene ser vi at resten etter divisjon med 7 er 4 kun når $n = 2$ eller $n = 5$. Blant tallene 45, 46, ..., 60 er det fire som gir 2 eller 5 etter divisjon med 7, nemlig 47, 51, 54 og 58. **E**
- (74) **Oppgave 6 2014/2015.** $625 = 3^0 \cdot 5^4$ **E**
- (74) **Oppgave 11 2014/2015.** Faktorisering av de gitte tallene gir $A = 7 \cdot 13$, $B = 17 \cdot 23$, $C = 27 \cdot 33 = 3^4 \cdot 11$, $D = 7 \cdot 11 \cdot 13$ og $E = 9 \cdot 11 \cdot 19$. Den største primfaktoren (23) er det B som har. **B**
- (74) **Oppgave 14 2014/2015.** Merk at $2002/22 = 91 = 7 \cdot 13$. Skriv $a = 22x$ og $b = 22y$, så følger det at $xy = 7 \cdot 13$. Siden a har færre divisorer enn b må y ha begge primtallsfaktorene 7 og 13, så $x = 1$ og $y = 91$, og derfor er $a + b = 22 \cdot (x + y) = 2024$ **B**



- (74) **Oppgave 19 2014/2015.** Hvis Emmy startet med tallet a og hun fikk b som første svar, er $b \leq \sqrt{a} < b + 1$, som er ekvivalent med $b^2 \leq a < b^2 + 2b + 1$. Ettersom a er et heltall er dette i sin tur ekvivalent med $b^2 \leq a \leq b^2 + 2b$. Hvis Emmy får svaret c etter neste utregning, er på samme måte $c^2 \leq b \leq c^2 + 2c$. Det tredje svaret er 1, så $1^2 \leq c \leq 1^2 + 2 \cdot 1$, altså $1 \leq c \leq 3$. Men det er gitt at $c \neq 1$, så c er enten 2 eller 3. Det gir $2^2 \leq b \leq 3^2 + 2 \cdot 3$, det vil si $4 \leq b \leq 15$, som til slutt gir $4^2 \leq a \leq 15^2 + 2 \cdot 15$, altså $16 \leq a \leq 255$. Begge ytterpunktene er mulige her, og differansen mellom dem er $255 - 16 = 239$ **C**
- (75) **Oppgave 3 2015/2016.** $4^7 \cdot 2^4 = 2^{14} \cdot 2^4 = 2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ **B**
- (75) **Oppgave 8 2015/2016.** Skriv for enkelhets skyld alle tall fra 0 til 999 med tre siffer, med ledende nuller for små tall.
- De to første sifrene i et tresifret tall velges vilkårlig blant 0, 1, ..., 8. Det kan gjøres på $9^2 = 81$ måter.
- Av tallene som fremkommer ved at det siste sifferet velges fritt blant 0, 1, ..., 8, er presist ett delbart med 9, siden disse er ni tall i rekkefølge. Så åtte av dem er ikke delelig med 9, og vi ender opp med $81 \cdot 8 = 648$ tall som oppfyller betingelsene i oppgaven. **D**
- (75) **Oppgave 11 2015/2016.** Ethvert heltall $n \geq 2$ har i hvert fall divisorene 1 og n . Dersom p er en divisor forskjellig fra disse to, er også n/p en divisor. Hvis det ikke finnes flere, er $p = n/p$, så $n = p^2$. Enhver divisor til p er også en divisor til n , så p må være et primtall, ellers har n flere divisorer. De fire mulighetene er $n = 2^2$, $n = 3^2$, $n = 5^2$ og $n = 7^2$ **C**
- (75) **Oppgave 15 2015/2016.** Ligningen $m^2 + 2015 = n^2$ kan skrives på formen $(n - m)(n + m) = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Hver måte å skrive høyresiden som et produkt av to faktorer gir en løsning, der $n - m$ er den minste og $n + m$ som den største av de to faktorene. Dette gir alltid heltallige løsninger fordi begge faktorene må være oddetall. En faktor kan velges på $2^3 = 8$ måter, siden den lages ved å ta produktet av tallene i en delmengde av $\{5, 13, 31\}$. (Produktet av tallene i den tomme mengden regnes lik 1.) Det gir $8/2 = 4$ muligheter, siden hver faktorisering involverer to forskjellige faktorer. **B**



- (75) **Oppgave 17 2015/2016.** Det viser seg at $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2) \cdot (n+3)$. Dette er alltid delelig på 4, så vi trenger bare å sjekke om det er delelig på 7 og på 25 (fordi $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4 \cdot 25 \cdot 7$). Høyst én av de fire faktorene n , $n+1$, $n+2$ og $n+3$ kan være delelig med 5, så den faktoren må da være delelig med 25. Om vi bare sjekker delelighet med 25 blir de første kandidatene $n = 22, 23, 24, 25$. Den første av disse som også gir delelighet med 7 er $n = 25$. Det gir $n+3 = 28 = 4 \cdot 7$ **B**
- (75) **Oppgave 2 2016/2017.** Primtallsfaktorisering gir $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, så de positive divisorene til 300 er alle tall på formen $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ med $i \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{0, 1\}$ og $k \in \{0, 1, 2\}$. Det er $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ mulige kombinasjoner av disse eksponentene. **D**
- (76) **Oppgave 9 2016/2017.** $2016 \cdot 5^{100} = 32 \cdot 63 \cdot 5^{100} = 5^{95} \cdot 63 \cdot 10^5$ ender med eksakt fem nuller, siden $5^{95} \cdot 63$ ikke er delelig med 10. **A**
- (76) **Oppgave 11 2016/2017.** k må være et partall, for ellers vil $15k$ ende på 5. La oss si $k = 2n$, så $15k = 30n$. Da må også $3n$ bare inneholde sifrene 0 og 1. Men tverrsummen i et slikt tall er antall enere, og siden tverrsummen av $3n$ er delelig med 3, er $3n = 111$ minste mulighet. Dermed er $k = 2n = 2 \cdot 37 = 74$, med tverrsum 11. **E**
- (76) **Oppgave 18 2016/2017.** Vi trenger to egenskaper ved funksjonen S . Den ene er at $S(10^n) = n + 1$, og den andre er at S er voksende, det vil si at om $m \leq n$, så er $S(m) \leq S(n)$. Da blir på den ene siden $S(S(2016^{2017})) \geq S(S(1000^{2017})) = S(3 \cdot 2017 + 1) = 4$, og på den andre siden $S(S(2016^{2017})) \leq S(S(10000^{2017})) = S(4 \cdot 2017 + 1) = 4$ **D**
- (76) **Oppgave 1 2017/2018.** Alle odde multipler av 5 har 5 som siste siffer. **C**
- (76) **Oppgave 8 2017/2018.** Fordi $(2n)^4 = 16n^4$ og 16 ikke går opp i 2018, kan ikke a og b begge være partall. Men da må begge være oddetall, fordi 2018 er et partall. Vi regner ut at $1^4 = 1$, $3^4 = 81$, $5^4 = 625$ og $7^4 > 2018$. Så a og b må velges blant tallene 1, 3 og 5, men da kan vi åpenbart ikke få til summen 2018. **A**
- (76) **Oppgave 14 2017/2018.** Primtallsfaktoriseringen av $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ er $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, og n går opp i dette presis dersom $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ med $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 2$, $0 \leq c \leq 1$ og $0 \leq d \leq 1$. Det gir i alt $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ muligheter. **E**



- (77) **Oppgave 19 2017/2018.** Spørsmålet er hvor mange positive heltall som ikke kan skrives på formen $5a + 7b$, med heltall $a \geq 0$ og $b \geq 0$. Men la oss spørre hvilke heltall n som *kan* skrives som $5a + 7b$: Her er en tabell som viser noen tall på denne formen:

b	$5a + 7b$ for $a = 0, 1, 2, \dots$
0	0, 5, 10, 15, 20, 25 , ...
1	7, 12, 17, 22, 27 , ...
2	14, 19, 24 , ...
3	21, 26 , ...
4	28 , ...

Fra de fem tallene **24–28** kan vi få til alle større tall ved å legge til multipler av 5. De tallene vi *ikke* kan få til er da de tallene mellom 1 og 23 som mangler i tabellen, nemlig de tolv tallene 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18 og 23. **D**

- (77) **Oppgave 7 2018/2019.** $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 209 = 11 \cdot 19$ er ikke et primtall. (Alle de andre er primtall. Merk at $100^2 - 99^2 = (100 - 99)(100 + 99) = 199$.) ... **E**

- (77) **Oppgave 13 2018/2019.** Man kan ikke lage summen 20, siden tre mynter blir for mye og to blir for lite. Men man kan lage $21 = 7 + 7 + 7$, $22 = 7 + 7 + 8$, $23 = 7 + 7 + 9$, $24 = 7 + 8 + 9$, $25 = 7 + 9 + 9$, $26 = 8 + 9 + 9$ og $27 = 9 + 9 + 9$, og alle større summer kan lages ved å legge et antall 7-kroninger til en av disse sju summene. **C**

- (77) **Oppgave 14 2018/2019.** Poengsummen med r rette og b blanke besvarelser er altså $p = 5r + b$. Det er gitt at $r + b \leq 20$, og $r \geq 0$, $b \geq 0$ selvsagt. Dersom $b \geq 5$ kan vi erstatte (r, b) med $(r + 1, b - 5)$ og få samme poengsum. Derfor trenger vi bare telle opp mulige poengsummer med $0 \leq b \leq 4$. Gitt en slik b har vi $21 - b$ muligheter for r ($r = 0, \dots, 20 - b$), så i alt er det $21 + (21 - 1) + (21 - 2) + (21 - 3) + (21 - 4) = 105 - (1 + 2 + 3 + 4) = 95$ mulige poengsummer.

..... **C**



- (77) **Oppgave 17 2018/2019.** Skriv $[x]$ for det største heltall mindre enn eller lik x . Antall partallsfaktorer i $2018!$ er $\left\lfloor \frac{2018}{2} \right\rfloor = 1009$. Når disse toerfaktorene er satt til side, vil tallene som opprinnelig var delelig med 4 fremdeles være partall. Disse gir $\left\lfloor \frac{2018}{4} \right\rfloor = 504$ nye toerfaktorer. Vi fortsetter med å legge til toerfaktorer for tallene delelig med 8, 16, osv. Antall slike faktorer er lik forrige antall delt på 2 og rundet av nedover. Totalt antall toerfaktorer blir derfor

$$\left\lfloor \frac{2018}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{16} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2018}{1024} \right\rfloor \\ = 1009 + 504 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2011$$

..... D

- (77) **Oppgave 18 2018/2019.** Dersom n er et oddetall, er $3^n - n^2$ et partall. Eneste partall som også er primtall er 2, og det får vi med $n = 1$, men ikke med noen større n , for om $n \geq 2$, så er $3^n > n^2 + 2$. (Det kan vises ved induksjon: Det er sant for $n = 2$, og om det er sant for en gitt n , så er også $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(n^2 + 2) = (n + 1)^2 + 2n(n - 1) + 5 > (n + 1)^2 + 2$.)

På den annen side, om $n = 2m$, er $3^n - n^2 = 3^{2m} - (2m)^2 = (3^m - 2m)(3^m + 2m)$, som sikkert ikke er et primtall om ikke $3^m - 2m = 1$, som vi får med $m = 1$. Det tilsvarende $n = 2$, og $3^2 - 2^2 = 5$ er et da også et primtall. For $m \geq 2$ kan vi bruke ulikheten fra første del: $3^m > m^2 + 2 > 2m + 1$, så $3^m - 2m > 1$, og dermed får vi ikke flere primtall enn de to vi har funnet. B

- (78) **Oppgave 2 2019/2020.** Vi ser etter de to siste sifrene i $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$. Siden $2 \cdot 5 = 10$ er med, er siste siffer null, og nest siste siffer blir lik siste siffer i produktet av resten av faktorene, altså $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$. Vi kan kaste bort alle siffer unntatt det siste i hver faktor og dessuten i alle resultater i mellomregningen, så vi betrakter i stedet $3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 9)$. Produktene i hver parentes har siste siffer 1, så siste siffer i dette produktet blir 3, og de to siste sifrene i det opprinnelige produktet blir så 30. B

- (78) **Oppgave 6 2019/2020.** Vi kan gjøre det med fem tall: $29 \cdot 2 \cdot 3 = 174$, $23 \cdot 7 = 161$, $19 \cdot 5 = 195$, $17 \cdot 11 = 187$ og 13. Vi kan ikke gjøre det med færre tall, for produktet av hvilke som helst to av de fem primtallene 13, 17, 19, 23 og 29 er større enn 200 (det er nok å sjekke de to minste: $13 \cdot 17 = 221$). B



- (78) **Oppgave 8 2019/2020.** Betingelsen $ab^2 \leq 100$ krever at $b^2 \leq 100$, altså $b \leq 10$, og $a \leq 100/b^2$. Skriv $\lfloor x \rfloor$ for største heltall mindre enn eller like x . Antall muligheter i alt blir da

$$\left\lfloor \frac{100}{1^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{100}{10^2} \right\rfloor = 100 + 25 + 11 + 6 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 153.$$

..... D

- (78) **Oppgave 11 2019/2020.** Tverrsummen av 17643 er 21, slik at 17643 er delelig med 3, men ikke med 9. Derfor er 17643 ikke et kvadrattall. (De øvrige tallene er virkelig kvadrattall: $12321 = 111^2$, $15129 = 123^2$, $18225 = 135^2$, $21904 = 148^2$.)

Alternativt kan vi benytte at ingen kvadrattall ender med tallsifferet 3, siden ingen av $0^2, 1^2, 2^2, \dots, 9^2$ gjør det, og $10a + b = 100a^2 + 20ab + b^2$.

Alternativt (for de mer kunnskapsrike – en variant av forrige alternativ) benytter vi at 3 ikke er en kvadratisk rest modulo 5.

Alternativ: Fordi $(2n)^2 = 4n^2$ og $(2n+1)^2 = 4(n^2 + n) + 1$, er alle kvadrattall enten delelig med 4, eller resten etter divisjon med 4 er 1. Men resten etter divisjonen $17463/4$ er 3. C

- (78) **Oppgave 15 2019/2020.** De positive divisorene har formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$ der eksponentene er heltall med $0 \leq a \leq 5$, $0 \leq b \leq 4$, $0 \leq c \leq 3$, $0 \leq d \leq 2$, $0 \leq e \leq 1$. Et slikt tall er kvadrattall hvis og bare hvis alle eksponentene er partall. Det gir tre muligheter hver for a og b (0, 1 og 2), to hver for c og d , og én for e . I alt $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ muligheter. D

- (78) **Oppgave 19 2019/2020.** Et moteksempel til påstand A er $r = s = \sqrt{2}$. Et moteksempel til påstand B og D er $r = \sqrt{2}$, $s = -\sqrt{2}$. Et moteksempel til påstand C er $r = s = \sqrt[4]{2}$ E



- (78) **Oppgave 6 2020/2021.** Hvis Nils har pantet x store og y små flasker, må $11x + 7y = 100$. Så $100 - 11x$ må være delelig med 7. Du kan sjekke alle verdiene $x = 0, 1, \dots, 9$ og se at bare $x = 4$ passer. Det gir $y = (100 - 44)/7 = 8$, så $x + y = 12$.

Du kan spare litt arbeid ved å legge merke til at $98 - 7x$ også er delelig med 7, slik at 7 må gå opp i $98 - 7x - (100 - 11x) = 4x - 2$. Multipliser med 2 og trekk fra $7x$, og konkluder at 7 går opp i $x - 4$, så x er 4 pluss et multiplum av 7. Siden $x < 10$ er $x = 4$ eneste mulighet.

Til sist, om du er kjent med modularegning, får du direkte $4x \equiv 2 \pmod{7}$ fra $11x + 7y = 100$, som gir $x \equiv 4 \pmod{7}$, igjen med $x = 4$ som eneste løsning med $0 \leq x \leq 9$ C

- (79) **Oppgave 10 2020/2021.** Dersom n ender på 101 i totallsystemet, så vil $n - 5$ ende på 000 i totallsystemet, fordi 5 skrives 101 i totallsystemet. Det vil si at $n - 5$ er delelig med 8. Men $615 - 5 = 610$ er ikke delelig med 8, mens 0, 328, 544 og 2016 alle er det. D

- (79) **Oppgave 12 2020/2021.** Forskjellen mellom vanlig tid og Karl Erik-tid øker med åtte timer hver time, så det tar en og en halv time for forskjellen å øke med tolv timer. Det går altså en og en halv time mellom hver gang klokken viser rett tid. I løpet av et døgn skjer det $24/\frac{3}{2} = 16$ ganger. (Hvis klokken viste rett tid i det døgnet starter, vil den også vise rett i det døgnet tar slutt. Da kunne det argumenteres for at svaret blir 17, men det blir litt feil, likevel. For sikkerhets skyld har vi ikke regnet 17 blant svaralternativene.) D

- (79) **Oppgave 14 2020/2021.** Fordi $1001 = 91 \cdot 11$, er alle tall på den gitte formen delelig på 11. Vi må ha $a \neq 0$ (ellers er ikke tallet sekssifret). Så a kan velges på en av ni måter, deretter kan b også velges på en av ni måter, og c kan velges på en av åtte måter. I alt har vi $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ muligheter. D

- (79) **Oppgave 18 2020/2021.** Vi faktoreriserer: $2020 = 2^2 \cdot 505$. Divisorene har form $2^a \cdot k$ med $a \in \{0, 1, 2\}$ og k en (nødvendigvis odde) divisor til 505. En slik divisor er odde bare når $a = 0$, og det skjer i $\frac{1}{3}$ av tilfellene. B

- (79) **Oppgave 8 2021/2022.** Det endrer ikke noe om du skriver alle tallene med fire siffer, med ledende nuller om det trengs. Altså 0001, 0002, 0003 og så videre. Da skriver du opp alle tekststrenger med lengde 4, som inneholder ett av de ni symbolene 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9. Sifferet 1 forekommer i første posisjon i 9^3 av disse, og i andre posisjon i 9^3 , og tilsvarende i tredje og fjerde posisjon. Tilsammen skriver du da $4 \cdot 9^3$ enere. Siste siffer i 9^3 er 9, så siste siffer i $4 \cdot 9^3$ er 6. D



(79) **Oppgave 13 2021/2022.** $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, og $4 + 3 + 3 = 10 < 11$ **A**

(80) **Oppgave 14 2021/2022.** Fordi siste siffer i produktet av to heltall bare avhenger av siste siffer i hvert av tallene, kan vi bare starte med å regne ut potenser av 2: Siste siffer i $2^1, 2^2, 2^3$ og så videre blir 2, 4, 8, 6, 2, ... og så gjentar det seg slik at siste siffer er det samme hver fjerde gang utover. Fordi $2021 = 505 \cdot 4 + 1$, får 2^{2021} samme sistesiffer som 2^1 , altså 2. **B**

(80) **Oppgave 4 2022/2023.** Benytt primtallsfaktoriseringen: $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ der $p_1, p_2, \dots, p_k$ er distinkte primtall. Produktet er et kvadrattall hvis og bare hvis hver multiplisitet m_i er et partall, og et kubikktall hvis og bare hvis hver m_i er delelig med 3. Vi er altså ute etter tall der m_i er delelig med 6. Siden $2^6 = 64$ og $3^6 = 729$, ser vi at ingen sjettepotenser av et produkt av to forskjellige primtall er mindre enn 1000. Dermed står vi bare igjen med potenser av ett primtall: $2^6 = 64$ og $3^6 = 729$. Man trenger knapt regne ut $2^{12} = 4096$ og $5^6 = 15625$ for å se at disse tallene er større enn 1000, så det er ikke flere muligheter. **C**

(80) **Oppgave 11 2022/2023.** Siden $5^3 = 125 > 100$, må $b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$, og dermed $b^3, c^3 \in \{1, 8, 27, 64\}$. Det skader ikke å anta at $b \leq c$, siden alt er uendret om vi bytter om b og c . Det gir da ti muligheter for summen $b^3 + c^3$:

$$b^3 + c^3 \in \{2, 9, 28, 65, 16, 35, 72, 91, 128\}.$$

Den siste kan vi se bort fra, og får (i samme rekkefølge)

$$100 - (b^3 + c^3) \in \{98, 91, 72, 35, 84, 65, 28, 9\}.$$

Av disse er bare ett kvadrattall, nemlig 9, som kom fra $b = 3, c = 4$ (med $b^3 + c^3 = 91$). Da må $a = 3$, så $ab + bc + ca = 9 + 12 + 12 = 33$ **B**

(80) **Oppgave 13 2022/2023.** Før Nils har strøket ut noen tall, har han skrevet opp tallene $3n + 1$ for $n = 0, 1, \dots, 133$, i alt 134 tall. Tallene han så stryker ut, er 10, 25, 40 ..., 400, altså alle tall på formen $15k + 10$ for $k = 0, 1, \dots, 26$, i alt 27 tall. Det står igjen $134 - 27 = 107$ tall.

For å være helt sikre på hvilke tall Nils stryker, merk at $3n + 1$ er delelig med 5 hvis og bare hvis $2(3n + 1) = 5n + (n + 2)$ er delelig med 5, det vil $n + 2$ delelig med 5. Det gir $n = 5k + 3$ for et heltall k , altså $3n + 1 = 15k + 10$. .. **E**



- (80) **Oppgave 16 2022/2023.** Fordi $1024 = 2^{10}$, må hvert av de tre tallene være en toerpotens: 2^k for $k = 0, 1, \dots, 10$. Alle primtall større enn 2 er odde, så det minste av de tre tallene må være 1. Det betyr at de to gjenværende tallene er 2^k og 2^{10-k} for en $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. (Vi tar ikke med $k = 5$ fordi alle tallene skal være forskjellige.) Vi har følgende muligheter for k og summen av de tre tallene: $k = 1$: Sum $1 + 2 + 512 = 515$; $k = 2$: sum $1 + 4 + 256 = 261$; $k = 3$: sum $1 + 8 + 128 = 137$; $k = 4$: sum $1 + 16 + 64 = 81$. Av disse summene er bare 137 et primtall, så det største av de tre opprinnelige tallene er 128. ... **B**

- (80) **Oppgave 20 2022/2023.** Om Nils kjøpte henholdsvis x , y og z smørbrød av de tre typene, så er

$$77x + 91y + 143z = 1993.$$

Konditoren må ha vært matematikkinteressert, siden hun valgte priser med slike enkle primtallsfaktoriseringer: $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$ og $143 = 11 \cdot 13$.

Vi noterer oss at $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, og skriver om ligningen til

$$77x + 91y + 143z + 9 = 2002.$$

Spesielt er venstresiden delelig med 7. Vi trekker fra $77x + 91y + 140z + 7$, (et heltallig multiplum av 7), og slutter at også $3z + 2$ er delelig med 7. Gang med 5: $15z + 10$ er delelig med 7. Trekk fra $14z + 7$ og konkluder at $z + 3$ er delelig med 7. Det betyr at z er ett av tallene 4, 11, 18, Åpenbart er $18 \cdot 143 > 1993$, så $z = 4$ eller $z = 11$.

Nå gjennomfører vi samme argument for y og 11 som vi gjorde for z og 7, og trekker $77x + 88y + 143z$ (multiplum av 11) fra venstresiden i ligningen, og finner at $3y + 9$ er delelig med 11. Vi ganger med 4, og får at $12y + 36$ er delelig med 11, trekker fra et passende multiplum av 11, og konkluderer at $y + 3$ delelig med 11. Så y er ett av tallene 8, 19, 30, Igjen er bare de to første aktuelle, siden $30 \cdot 91 > 1993$.

De to mulighetene for z koster $143 \cdot 4 = 572$ og $143 \cdot 11 = 1573$, mens de to mulighetene for y koster $91 \cdot 8 = 728$ og $91 \cdot 19 = 1729$. For ikke å overskride budsjettet, må vi velge det minste alternativet for begge, med sum $91y + 143z = 91 \cdot 8 + 143 \cdot 4 = 1300$. (Det kunne vi nok sett med mindre regning, bare litt tallfølelse og et par grove overslag.) Det gir $77x = 1993 - 1300 = 693$, så $x = 9$. Dermed er $x + y + z = 9 + 8 + 4 = 21$ **D**



- (81) **Oppgave 1 2023/2024.** Oppgaven løses raskt ved bare å telle divisorer i svaralternativene, men med litt mer teori kan det løses slik: Ethvert heltall $n > 1$ kan faktoriseres entydig som $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$, der $p_1 < \cdots < p_k$ er primtall og hver m_i er et positivt heltall. Divisorene til dette tallet har formen $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ der $0 \leq n_i \leq m_i$ for hver i . Det gir i alt $(m_1 + 1) \cdots (m_k + 1)$ muligheter, og altså så mange divisorer. Et heltall med eksakt 6 divisorer må derfor enten ha formen p_1^5 for et primtall p_1 , eller $p_1^2 p_2$ for distinkte primtall p_1, p_2 . Minste kandidat av den første typen er åpenbart $2^5 = 32$, mens minste kandidat av den andre typen er $2^2 \cdot 3 = 12$ **B**
- (81) **Oppgave 6 2023/2024.** Siste siffer i produktet av to tall er entydig gitt ved siste siffer i hvert av de to tallene. Siden k^8 er et partall som ikke er delelig på 5, gjelder det samme for k , så siste siffer i k er en av 2, 4, 6 eller 8. Kvadrerer vi de fire tallene, ser vi at siste siffer i k^2 er 4 eller 6. Kvadrerer vi enda en gang, ser vi at siste siffer i k^4 er 6. **C**
- (81) **Oppgave 12 2023/2024.** Lisa kan lett lage tallene 1, 4, 6 og 9. Ved å legge til 5 et jevnt antall ganger, kan hun dermed lage alle tall som ender på ett av de fire sifrene. Men det er de eneste tallene hun kan få til, for om hun ganger et slikt tall med 4 eller legger til 5, får hun alltid et nytt tall som ender på et av disse sifrene. Det er i alt $4 \cdot 10 = 40$ positive tall mindre enn 100 som ender på ett av de fire sifrene. **A**
- (81) **Oppgave 20 2023/2024.** En banal mulighet er $u = 0$: Da blir $a_n = v$ for alle n , så $v = 2023$ er eneste mulighet.
- En annen mulighet er $u = 1$: Da blir $a_n = nv$, så $v = 1$ er eneste mulighet som gir $a_{2023} = 2023$.
- Om vi setter $a_n = u^n b_n$, trenger ikke b_n være heltall, men vi får $b_{n+1} = b_n + v/u^{n+1}$, og dermed $b_n = v(1/u^n + 1/u^{n-1} + \cdots + 1/u^2) + b_1$. Merk at $b_1 = v/u$, så det siste leddet føyer seg pent inn i rekken. Dermed har vi $a_n = v(1 + u^2 + \cdots + u^{n-1}) = v(u^n - 1)/(u - 1)$. Setter vi inn for $n = 2023$ skal vi altså ha $2023(u - 1) = v(u^{2023} - 1)$.
- Dette gir oss ingen informasjon for $u = 1$, men det tilfellet har vi alt drøftet. For $u = 0$ får vi $v = 2023$, som vi også alt har sett. Vi kan prøve $u = -1$, som også passer med $v = 2023$. Men forsøker vi med andre heltall u , altså $|u| \geq 2$, er det klart at høyresiden blir alt for stor i forhold til venstresiden. Spesifikt, $|u^{2023} - 1|/|u - 1| \geq |u|^{2022}/|2u| > 2^{2020}$, eller tilsvarende estimerer.
- Alt i alt har vi altså bare løsningene $(0, 2023)$, $(1, 1)$ og $(-1, 2023)$ **C**



- (81) **Oppgave 2 2024/2025.** Tverrsummen av de tre tallene er $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $10 + 5 = 15$, $15 + 6 = 21$ og $21 + 7 = 28$. Av disse er bare de to midterste delelige med 3.

Tverrsummen er summen av sifrene i tallet. Ettersom $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$ og så videre, kan vi trekke 9 ganger tiersifferet, 99 ganger hundresifferet, 999 ganger tusensifferet og så videre fra tallet og stå igjen med tverrsummen. Og da har vi trukket fra et multiplum av 3, så tallet er delelig med 3 hvis og bare hvis tverrsummen er delelig med 3. (Testen virker også for delelighet med 9).

Alternativ løsning: Siden $123 = 3 \cdot 41$, kan vi trekke fra henholdsvis 1230, 12300, 123000, 1230000 (alle multipler av 3) før vi sjekker delelighet med 3, og vi står igjen med 4, 45, 456 og 4567. Av disse er 4 ikke delelig med 3, men 45 er det, og derfor også $456 = 45 \cdot 10 + 6$, men ikke 4567 (for 4566 er). ... **C**

- (82) **Oppgave 7 2024/2025.** Skriv p , q og r (med $p < q < r$) for barnas aldre henholdsvis for tre måneder siden, i dag, og om fem måneder. Ettersom tre barn ikke har mer enn tre fødselsdager i løpet av åtte måneder, er $r - p \leq 3$. Eneste trippel av primtall som alle er blant fire påfølgende tall, er $p = 2$, $q = 3$ og $r = 5$. Siden alle barna har fødselsdag i perioden fra for tre måneder siden til fem måneder frem i tid, og $8 + 3 < 12$, er summen av aldre den samme om åtte måneder som om fem måneder, altså 5. (To av barna var ett år for tre måneder siden, mens det tredje barnet har hatt sin ettårsdag siden da. Og de to andre har fødselsdager i løpet av de neste fem månedene.) **A**

- (82) **Oppgave 9 2024/2025.** Vi kan enkelt faktorisere de tre første tallene: $1313 = 13 \cdot 101$, $1919 = 19 \cdot 101$, og $7357 = 7 \cdot 1051$. Her er både 7, 13, 19 og 101 primtall, og 1051 er ikke delelig med 2, 3 eller 5, så minste primfaktor så langt er 7. (1051 er også et primtall, men det trenger vi ikke for løsningen.) Tallene i **D** og **E** er ikke delelige med hverken 2, 3, 5 eller 7: For 2 og 5 ser vi det av siste siffer, for 3 ser vi det ved å ta tverrsummen. Videre er $7537 = 7 \cdot 1001 + 530$ ikke delelig med 7, siden $530 = 53 \cdot 10$ ikke er det. For 11131 er det kan hende greiest å gjennomføre divisjonen med 7 og se at resten blir 1. **C**

- (82) **Oppgave 10 2024/2025.** Fordi $12n + 131 = 4(3n + 2) + 123$, er $12n + 131$ delelig med $3n + 2$ hvis og bare hvis 123 er delelig med $3n + 2$. Men $123 = 3 \cdot 41$ med 3 og 41 primtall, så de eneste heltallene som går opp i 123 er 1, 3, 41 og 123 selv. Av disse har bare 41 formen $3n + 2$, og da med $n = 13$ **A**



- (82) **Oppgave 14 2024/2025.** Hvis Ingrid kjøpte b boller og m muffinser, må $13b + 19m = 430$. Skriv det heller som $13s + 6m = 430$, der $s = b + m$ er tallet det spørres etter. Siden $430 = 6 \cdot 71 + 4$, må derfor $s = 6x + 4$ for et heltall x . (Detaljert: $s = 6 \cdot (71 - m - 2s) + 4$.) Vi må ha $13s \leq 430 = 13 \cdot 33 + 1$, altså $s \leq 33$. Likeledes er $19s \geq 430 = 19 \cdot 22 + 12$, så $s > 22$. Blant tallene på formen $s = 6x + 4$, oppfyller kun $s = 28$ begge ulikhetene. Vi kan sjekke svaret ved å regne ut $430 - 13 \cdot 28 = 66 = 6 \cdot 11$, så dette går opp. Ingrid kjøpte 11 muffinser og 17 boller. E