



Innledning

Dette dokumentet inneholder løsninger til alle oppgavene som er gitt i andre runde i Abelkonkurransen fra og med 2005/2006 til og med 2024/2025.

Oppgavene er samlet i et separat dokument. Du finner sidetallet til hver oppgave i oppgavesamlingen i parentes i venstremargen nedenfor.

Innhold

Algebra – side 2

Geometri – side 11

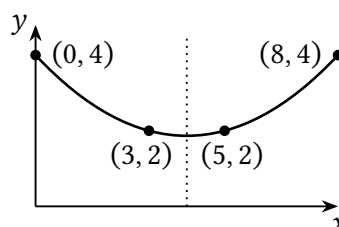
Kombinatorikk og sannsynlighet – side 29

Tallteori – side 44



Algebra

- (2) **Oppgave 1 2005/2006.** Det er to heltall med tre sifre som har 37 som de to første sifrene og som er delelig med 7, nemlig $53 \cdot 7 = 371$ og $54 \cdot 7 = 378$. Så $b = 53$ eller $b = 54$, og tallet Ola skrev har tre sifre. Det er bare ett heltall med tre sifre som har 53 eller 54 som de to første sifrene og som er delelig med 11, nemlig $49 \cdot 11 = 539$. Så Ola skrev 49 på tavla. 49
- (2) **Oppgave 5 2005/2006.** Hver gang to tall erstattes med et nytt på tavla, reduseres summen av tall på tavla med 10. Den opprinnelige summen var $1 + 2 + \dots + 25 = 25 \cdot 26/2 = 325$, slik at vi etter å ha erstattet tall 24 ganger, får $325 - 240 = 85$ 85
- (2) **Oppgave 8 2005/2006.** Skriv om ulikheten til $(x-y)^2 - (x-y) + 1/4 \leq 2y + 1/4$, altså $(x-y-1/2)^2 \leq 2y + 1/4$. Dette medfører at $y \geq -1/8$, da kvadratet er ikke-negativt. Når $y = -1/8$, er ulikheten bare oppfylt når kvadratet er null, dvs. for $x = 3/8$. Så $x_0 = 3/8$, og $40x_0 + 60 = 75$ 75
- (2) **Oppgave 9 2005/2006.** La $f(x) = x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 + (x+3)^3$. Da er summen i oppgaven lik $f(1) + f(5) + f(9) + f(13) + f(17)$. Ved å multiplisere ut og trekke sammen får vi $f(x) = 12x + 18$, og summen blir $12(1+5+9+13+17) + 5 \cdot 18 = 630$ 630
- (2) **Oppgave 2 2006/2007.** Hvis vi multipliserer likningene med henholdsvis x , y og z , får vi $x^2 + 2xy = 100$, $y^2 + 2yz = 96$ og $z^2 + 2xz = 93$. Adderer vi disse likningene, får vi $289 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2$, og $x + y + z = \sqrt{289} = 17$ 17
- (2) **Oppgave 4 2006/2007.** Fordi f er en andregradsfunksjon, er grafen til $y = f(x)$ symmetrisk om ei loddrett linje og voksende på den ene sida av linja og minkende på den andre. Da $f(3) = 2 = f(5)$, er symmetrilinja $x = (3 + 5)/2 = 4$. Så $f(0) = f(8) = 4$ 4



- (2) **Oppgave 7 2006/2007.** Vi har $20 = x_8 = 4x_2 + 2x_4 - 8 = 4x_2 + 2(2x_2 + 2x_2 - 4) - 8 = 12x_2 - 16$, som gir $x_2 = 3$, og da er $x_4 = 2x_2 + 2x_2 - 4 = 8$. Videre er $36 = x_{12} = 4x_3 + 3x_4 - 12 = 4x_3 + 24 - 12 = 4x_3 + 12$, som gir $x_3 = 6$. Da er $x_{30} = 10x_3 + 3x_{10} - 30 = 60 + 45 - 30 = 75$ 75



- (3) **Oppgave 7 2007/2008.** Legg merke til at $\frac{100}{k(k+1)} = \frac{100}{k} - \frac{100}{k+1}$ for $k \neq 0, k \neq -1$.
Det gir $\frac{100}{1 \cdot 2} + \frac{100}{2 \cdot 3} + \frac{100}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{100}{99 \cdot 100} = \frac{100}{1} - \frac{100}{2} + \frac{100}{2} - \frac{100}{3} + \frac{100}{3} - \frac{100}{4} + \dots + \frac{100}{99} - \frac{100}{100} = 100 - 1 = 99$ 99
- (3) **Oppgave 9 2007/2008.** Legger vi sammen de to likningene, får vi $x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 306$, altså andregradslikningen $(x + y)^2 + (x + y) - 306 = 0$ i $x + y$, som gir $x + y = -18$ eller $x + y = 17$. Første likning minus tre ganger andre likning gir $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 3y = -2$, eller $(x - y)^2 = 3(x + y) - 2 = 3 \cdot 17 - 2 = 49$ ($x + y \neq -18$ fordi $(x - y)^2$ må være ikke-negativ). (Fra $x + y = 17$ og $x - y = \pm 7$ finner vi $(x, y) = (5, 12)$ eller $(x, y) = (12, 5)$, som virkelig oppfyller de gitte likningene.) 49
- (3) **Oppgave 1 2008/2009.** Det er i alt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ tall i de første sju radene. Det største tallet er $2 \cdot 28 - 1 = 55$, og $1 + 3 + \dots + 55 = ((1 + 55) + (3 + 53) + \dots + (55 + 1))/2 = 28 \cdot 56/2 = 784$ 784
- (3) **Oppgave 5 2008/2009.** Vi har $3(x + y) = 10\sqrt{xy}$, og divisjon med x resulterer i $3(1 + \alpha^2) = 10\alpha$, der $\alpha = \sqrt{y/x}$. Denne andregradslikningen har løsninger $\alpha = (5 \pm 4)/3$, og fordi $\alpha > 1$, må vi velge den største løsningen, $\alpha = 3$, som gir $y/x = 9$ 9
- (3) **Oppgave 6 2008/2009.** Ved å ta inversen av begge sidene av likningen får vi $1/f(n+1) = 1/f(n) + a$ for $n = 1, 2, \dots$. Så $2009 = 1/f(9) = 1/f(8) + a = 1/f(7) + 2a = \dots = 1/f(1) + 8a = 1 + 8a$, og $a = (2009 - 1)/8 = 251$ 251
- (3) **Oppgave 2 2009/2010.** Vi får et anslag ved å starte med 201 og dividere på 2,1 tre ganger og hver gang avrunde oppover til nærmeste heltall. Det gir 22. Hvis vi utfører operasjonen tre ganger på 22, får vi faktisk 201 (mens vi får et mindre tall hvis vi starter med 21 og et større tall hvis vi starter med 23). 22
- (3) **Oppgave 6 2009/2010.** Ved å multiplisere ut og ved opplysningen i oppgaven, er $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 5ab(a + b)$, slik at $(a + b)^2 = 5ab$, og $a^2 + b^2 = 3ab$ ved første kvadratsetning. Dette gir $a/b + b/a = 3$, og $a^2b^{-2} + 2 + a^{-2}b^2 = 9$ ved første kvadratsetning, slik at $a^{-2}b^2 + a^2b^{-2} = 7$ 7
- (4) **Oppgave 10 2009/2010.** Leddene i summen er av form $i!(i^2 + i + 1) = i!(i + 1)^2 - i! \cdot i = (i + 1)!(i + 1) - i! \cdot i$. Når vi lar i gjennomløpe tallene fra 100 til 1, får vi til sammen 200 ledd, der alle, unntatt det første og det siste, kanselleres mot hverandre. Så $S = 101! \cdot 100 - 1$, og $(S + 1)/101! = 100$ 100



- (4) **Oppgave 1 2010/2011.** $2x^2 - 32x - 15 = 2(x-a)(x-b) = 2x^2 - 2(a+b)x + 2ab$ for alle reelle tall x , så $-2(a+b) = -32$, og $a+b = 16$ 16
- (4) **Oppgave 4 2010/2011.** $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (ab(a/b + b/a))^2 - 2a^2b^2 = (3ab)^2 - 2a^2b^2 = 7a^2b^2 = 7 \cdot 4 = 28$ 28
- (4) **Oppgave 7 2010/2011.** $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x-1) = x^6 - x = (x^6 - 10x + 9) + (9x - 9) = 9(x-1)$. Ved å dividere med $x-1$, får vi $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 9$ 9
- (4) **Oppgave 2 2011/2012.** Tallet $a_1 = 2012$ kan også skrives $2048 - 32 - 4$, som blir 11111011100 i totallsystemet. Det tar ett trinn å bli kvitt hver av tre nuller og to trinn å bli kvitt hver av sju enere, det vil si i alt $3 + 2 \cdot 7 = 17$ trinn å bli kvitt alle de binære sifrene utenom den første eneren.
- Alternativt kan vi skrive opp tallfølgen direkte: 2012, 1006, 503, 502, 251, 250, 125, 124, 62, 31, 30, 15, 14, 7, 6, 3, 2, 1, 0, 0,..., og så trenger vi bare telle oss frem til svaret. 18
- (4) **Oppgave 8 2011/2012.** Bruk $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ der a og b er de to parentesene i telleren. Da blir $a+b$ lik parentesen i nevneren, og forkortes mot denne. Vi står igjen med $\frac{1}{3018}(a-b) = 2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + \dots + 2012^2 - 2011^2$, som er en sum av ledd på formen $(2n)^2 - (2n-1)^2 = (2n-1) + 2n$, for $n = 1, 2, \dots, 1006$, altså lik $1 + 2 + 3 + \dots + 2012 = \frac{1}{2} \cdot 2012 \cdot 2013$. Svaret blir $\frac{1006 \cdot 2013}{3018} = \frac{2013}{3}$. 671
- (4) **Oppgave 10 2011/2012.** På en tavle ved siden av skriver vi opp tallene $1/a$ for hvert tall a på den første tavlen. Når listen på den første tavlen starter med a og b , starter listen på den andre tavlen med $x = 1/a$ og $y = 1/b$. På den første tavlen strykes a og b , og $ab/(a+b)$ føyes til bakerst. På den andre tavlen strykes da x og y , og $(a+b)/(ab) = y + x$ føyes til bakerst. Derfor vil summen av alle tallene på den andre tavlen forbli konstant lik $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \dots + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{10} = 10$, og det er så det tallet som til sist står alene igjen. 10
- (5) **Oppgave 3 2012/2013.** Vi finner summen av koeffisientene ved å sette inn $x = 1$ i polynomet, med resultat $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 104 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 103) = 104$. 104



- (5) **Oppgave 8 2012/2013.** Rekursjonsligningen kan skrives $x_{n+2} - 3x_{n+1} = 3(x_{n+1} - 3x_n)$, slik at følgen med elementer $x_{n+1} - 3x_n$ vokser geometrisk med faktor 3. Siden $x_1 - 3x_0 = 9 = 3^2$, får vi $x_{n+1} - 3x_n = 3^{n+2}$. Divisjon med 3^{n+1} gir $3^{-(n+1)}x_{n+1} - 3^{-n}x_n = 3$. Adderer vi disse ligningene for $n = 0, 1, \dots, k-1$ får vi $3^{-k}x_k - x_0 = 3k$, slik at $x_k = 3^k(3 + 3k) = 3^{k+1}(k+1)$. Nå er $2013 = 3 \cdot 671$, og 671 er ikke delelig med 3, så x_k er delelig med 2013 hvis og bare hvis $k+1$ er delelig med 671. Det skjer for første gang når $k = 670$ 670
- (5) **Oppgave 4 2013/2014.** Tallene 1–9 tar opp de første ni sifrene, mens tallene 10–99 tar de neste $2 \cdot 90 = 180$ sifrene, til sammen 189 sifre så langt. Fordi $2013 - 189 = 3 \cdot 608$, har vi brukt opp 2013 siffer etter å ha lagt til 608 tresifrede tall. Disse er altså tallene 100–707, så rekken av tallsiffer fortsetter fra det 2014. sifferet med 708709710 708
- (5) **Oppgave 7 2013/2014.** $p(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) = x^3 - (r_1+r_2+r_3)x^2 + \dots$, så $r_1 + r_2 + r_3 = -5$. $p(-5) = -5^3 + 5^3 + 20 \cdot 5 + 14 = 114$.
- Alternativ løsning:* Vi ser at $p(1) = 0$. Polynomdivisjon gir $p(x) = (x-1) \cdot (x^2 + 6x - 14)$. Nullpunktene er 1 og $-3 \pm \sqrt{23}$, med sum -5 114
- (5) **Oppgave 2 2014/2015.** Med $c = 1/b$ er $143 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c) = 13(a+c)$, så $a+c = 143/13 = 11$ 11
- (5) **Oppgave 7 2014/2015.** Vi multipliserer med 10 og kompletterer kvadratet: $4260k - 900k^2 = -(30k)^2 + 2 \cdot 71 \cdot 30k = 71^2 - (30k - 71)^2$. Det er klart at $k = 2$ er heltallet som resulterer i største verdi for dette uttrykket. Det gir $4260k - 900k^2 = 71^2 - 11^2 = 4920$, og $426k - 90k^2 = 492$ 492
- (5) **Oppgave 5 2015/2016.** Ulikheten kan skrives om til $(x+y-1)^2 \leq 0$, så $x+y = 1$. Det følger derfor fra den gitte likningen at $y-x = (y-x)(y+x) = y^2 - x^2 = \frac{1}{3}$, så $y = \frac{2}{3}$ og $x = \frac{1}{3}$, og dermed $y/x = 2$ 2
- (6) **Oppgave 7 2015/2016.** Kall det gitte tallet x . Multiplikasjon og divisjon med $\sqrt{111 \cdot 112} + 111$ gir $x = 4(\sqrt{111 \cdot 112} + 111) \approx 4(111\frac{1}{2} + 111) = 890$. Avviket i tilnærmingen kan estimeres slik:

$$4(111\frac{1}{2} - \sqrt{111 \cdot 112}) = 4 \frac{(111\frac{1}{2})^2 - 111 \cdot 112}{111\frac{1}{2} + \sqrt{111 \cdot 112}} = \frac{1}{111\frac{1}{2} + \sqrt{111 \cdot 112}} < \frac{1}{2}$$

– med svært god margin i den siste ulikheten.



Alternativ løsning: Likningen $\sqrt{111 \cdot 112} = 111(1 + 4/x)$ kvadrerer gir $111 \cdot 112 = 111^2(1 + 8/x + 16/x^2)$, som forenkles til $1 = 111(8/x + 16/x^2)$. Multiplisert med x gir det $x = 888(1 + 2/x)$. Det gir først $x > 888$, som innsatt på høyresiden gir $x < 888(1 + \frac{2}{888}) = 890$. Innsatt på ny gir det $x > 888(1 + \frac{2}{890}) = 890 - \frac{4}{890}$ 890

- (6) **Oppgave 6 2016/2017.** Det virker plausibelt at jentene kommer raskest frem dersom Cecilie tar med seg Anne på sykkel, mens Beate begynner å gå. Så setter Cecilie av Anne før de er kommet frem, og Anne fortsetter å gå, mens Cecilie sykler tilbake og møter Berit, og tar henne med seg til skolen. For at dette skal bli optimalt, må de ordne seg slik at alle tre ankommer skolen samtidig, så ingen venter unødig. Det blir lettest å stille opp en ligning for dette om vi simpelthen merker oss at sykkel går tre ganger raskere enn en fotgjenger. Tallene blir enkle om vi sier at Cecilie setter av Anne etter $6x$ kilometer. Da har Beate gått $2x$ kilometer, og avstanden mellom de to er $4x$ kilometer. Så når Cecilie har syklet $3x$ kilometer tilbake, har Beate gått x kilometer til, og de møtes. Nå har Beate gått $3x$ kilometer. Hun og Cecilie er $3 - 3x$ kilometer fra skolen, mens Anne nå er $3 - 7x$ kilometer fra skolen. Skal de nå frem samtidig, må $3 - 3x = 3(3 - 7x)$, så $x = \frac{1}{3}$. I alt har Beate syklet $6x + 3x + 3 - 3x = 5$ kilometer. Det har tatt henne $5/15 \cdot 60 = 20$ minutter.

At det ikke kan gjøres raskere, kan vi se slik: Skriv $D = 3A + 3B - C$, der A , B og C er avstanden Anne, Beate og Cecilie har igjen til skolen. Opprinnelig er $D = 15$ km, og målet er å få $D = 0$ så raskt som mulig. Men D kan ikke avta raskere enn 45 km/h: Når Cecilie har med seg en av de andre på sykkel, kan D avta med innil $3 \cdot 15 + 3 \cdot 5 - 15 = 45$ kilometer per time, og når hun ikke har det, kan D avta med inntil $3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 15 = 45$ kilometer per time. Dermed tar det minst $15/45 = 1/3$ time å få $D = 0$ 20

- (6) **Oppgave 10 2016/2017.** For positive tall a og b er $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, slik at $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Med $a = \sqrt{x - 127}$ og $b = \sqrt{k - x}$ gir det $\sqrt{x - 127} + \sqrt{k - x} \leq \sqrt{2(k - 127)}$. Vi må derfor ha $\sqrt{2(k - 127)} \geq 13$, som gir $2(k - 127) \geq 169$, og $k \geq 127 + 169/2$. Siden k skal være et heltall, må $k \geq 127 + 170/2 = 212$. Med $k = 212$ viser det seg at $x = 163$ er en løsning.

Alternativt, mer likefrem men litt mer omstendelig, kan man kvadrere ligningen, isolere den gjenværende kvadratroten på den ene siden, og kvadrere på ny. Resultatet er en andregradsligning i x , som må ha diskriminant ≥ 0 . Denne ulikheten løses så med hensyn på k . (Vi står over detaljene.) 212



- (6) **Oppgave 4 2017/2018.** Multipliser utvalgte ledd i ligningen med potenser av $x - y = 1$, slik at alle ledd får grad 2:

$$0 = (x - y)^2 + (x - y)(-2x + 3y) - 4x^2 + 5xy + 6y^2 = -5x^2 + 8xy + 4y^2.$$

Da må $t = x/y$ oppfylle ligningen $-5t^2 + 8t + 4 = 0$. Denne ligningen har to løsninger med sum $8/5$, og $60 \cdot 8/5 = 96$.

Alternativ løsning: Sett inn $y = x - 1$ i den første ligningen. Resultatet er en annengradslikning med løsninger $x = 2$ og $x = 2/7$, som gir henholdsvis $x/y = x/(x - 1) = 2$ og $x/y = x/(x - 1) = -2/5$, med sum $8/5$ 96

- (6) **Oppgave 8 2017/2018.** Vi har $p(x) = (x - 13)^3 + 179$, og ser at $(1 - 13)^3 + (25 - 13)^3 = 0$ og $(7 - 13)^3 + (19 - 13)^3 = 0$, så $p(1) + p(7) + p(19) + p(25) = 4 \cdot 179 = 716$ 716

- (6) **Oppgave 3 2018/2019.** Den likefremme løsningen er å skrive $P(x) = ax^2 + bx + c$, som gir de tre ligningene $a + b + c = 1$, $4a + 2b + c = 8$ og $9a + 3b + c = 27$. Disse løses med resultat $a = 6$, $b = -11$ og $c = 6$, og så er det bare å sette inn og få $P(-9) = 6 \cdot (-9)^2 - 11 \cdot (-9) + 1 = 591$.

Man kan spare litt arbeid ved i stedet å sette $P(x) = a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c$, slik at de tre ligningene får formen $a - b + c = 1$, $c = 8$ og $a + b + c = 27$. Det gir $a = 6$ og $b = 13$, slik at $P(x) = 6(x - 2)^2 + 13(x - 2) + 8$, og på ny er det bare å sette inn.

Alternativ løsning: Tredjegradspolynomet $x^3 - P(x)$ har de tre nullpunktene 1, 2 og 3. Det har også ledende koeffisient 1, så det kan faktoriseres som $x^3 - P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Med andre ord er $P(x) = x^3 - (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, og derfor $P(-9) = -9^3 - (-10) \cdot (-11) \cdot (-12) = -729 + 1320 = 591$ 591

- (6) **Oppgave 8 2018/2019.** Med $x = 10^{320} - \sqrt{10^{640} - 1}$ blir $1/x = 10^{320} + \sqrt{10^{640} - 1}$. Det gir $10^{320} < 1/x < 2 \cdot 10^{320}$, og derfor $5 \cdot 10^{-321} < x < 10^{-320}$. Det følger at x har 320 sammenhengende nuller etter desimaltegnet. 320

- (7) **Oppgave 2 2019/2020.** Start med de to første leddene: $2020! - 2019! \cdot 2019 = 2019! \cdot 2020 - 2019! \cdot 2019 = 2019! \cdot (2020 - 2019) = 2019!$. Nå starter uttrykket med $2019! - 2018! \cdot 2018$, som vi behandler på samme måte, med resultat $2018!$. Slik fortsetter vi, inntil vi står igjen med $3! - 2! \cdot 2 = 6 - 4 = 2$ 2

- (7) **Oppgave 8 2019/2020.** Erstatte vi x med $1 - x$ i den gitte ligningen, blir resultatet $2f(1 - x) - f(x) = (1 - x)^2 + 5(1 - x) - 1 = x^2 - 7x + 5$. Om vi så legger til to ganger den opprinnelige ligningen og deler på 3 står vi tilbake med $f(x) = x^2 + x + 1$, slik at $f(20) = 421$ 421



- (7) **Oppgave 4 2020/2021.** Et slikt polynom har formen $P(x) = a(x+1)(x+2)(x+3) = a(x^3 + (1+2+3)x^2 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1)x + 1 \cdot 2 \cdot 3) = a(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$, så vi må rett og slett kreve at a er et heltall og $0 < 11a < 1000$. Da må $a \leq 90$.

..... 90

- (7) **Oppgave 7 2020/2021.** Siden $52 + 38 = 90$, kan vi skrive om ligningen slik:

$$\tan(x) = \frac{\sin(52^\circ)}{\sin(38^\circ)} = \frac{\sin(52^\circ)}{\cos(52^\circ)} = \tan(52^\circ).$$

Løsningene til ligningen er alle tall på formen $180k + 52$, der k er et heltall. Fordi $2020 = 180 \cdot 11 + 40$ og $4040 = 180 \cdot 22 + 80$, og $40 < 52 < 80$, er $2020 \leq 180k + 52 \leq 4040$ for $k = 11, 12, \dots, 22$. I alt 12 løsninger. 12

- (7) **Oppgave 3 2021/2022.** Ettersom $50000 = 4 \cdot 12500$, dekker planten 12500 kvadratmeter bare to dager før den dekker 50000 kvadratmeter. 26

- (7) **Oppgave 6 2021/2022.** Om bussen bruker a timer på vei A, b timer på vei B og c timer på vei C, er altså $a + b = 5$, $a + c = 4$ og $b + c = 3$. Differansen mellom de to første ligningene gir $b - c = 1$, og legger vi til den siste, får vi $2b = 4$, altså $b = 2$. Nå er det lett å finne at $c = 1$ og $a = 3$. De tre fartene på vei A, B og C er henholdsvis $90/3 = 30$, $90/2 = 45$ og $90/1 = 90$ kilometer per time. Gjennomsnittet av disse er $(30 + 45 + 90)/3 = 55$ 55

- (7) **Oppgave 1 2022/2023.** Alle tallene i oppgaven er toerpotenser: $256 = 2^8$, $512 = 2^9$ og $4096 = 2^{12}$. Først er $256^a = 512^b$, altså $2^{8a} = 2^{9b}$, slik at $8a = 9b$. Siden a og b ikke har felles primfaktorer og 8 og 9 ikke heller, må $a = 9$ og $b = 8$. (Detaljert: Siden $8 \mid 9b$, der streken står for «går opp i», og 8 og 9 ikke har felles faktorer, må $8 \mid b$. Og fordi $b \mid 8a$ og a, b ikke har felles faktorer, må $b \mid 8$. Tilsammen gir disse to at $b = 8$. Det følger direkte at $a = 9$, eller du kan vise det på samme måte.) Samme resonnement gir $9c = 12d$, men siden 9 og 12 har en felles faktor 3, må dette forkortes til $3c = 4d$, og dermed $c = 4$ og $d = 3$. Til sist er $12e = 8f$, så $3e = 2f$, og $e = 2$, $f = 3$. Dermed er $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 9^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 = 183$ 183

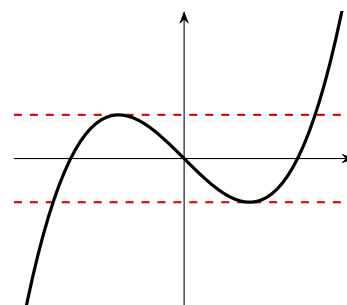
- (8) **Oppgave 4 2022/2023.** Skriv $f(x) = ax^2 + bx + c$, med $c = 123456$. Når $f(s) = f(t)$ (med $s = 2525$ og $t = 5252$), er $0 = f(s) - f(t) = a(s+t)(s-t) + b(s-t)$ ved konjugatsetningen. Forkorting med $s - t \neq 0$ gir $s + t = -b/a$, så $f(7777) = f(s+t) = a(s+t)(-b/a) + b(s+t) + c = c$.

Alternativ løsning: Grafen til andregradspolynomet f er symmetrisk om en linje $x = c$. Fordi $f(2525) = f(5252)$, må c være middelværdien av 2525 og 5252, altså $c = \frac{7777}{2}$. Men da ligger 7777 og 0 symmetrisk om c , så $f(7777) = f(0) = 123456$ 720



- (8) **Oppgave 1 2023/2024.** Skriv N og H for Nils og Henriks nåværende aldre. Vi har $N - 13 = \frac{1}{2}(H + 2)$ og $H + 1 = N - 2$. Skriv den første ligningen som $2N - H = 28$ og sett inn $H = N - 3$ fra den andre, altså $2N - N + 3 = 28$, så $N = 25$, og derfor $H = 25 - 3 = 22$. $NH = 25 \cdot 22 = 550$ 550

- (8) **Oppgave 9 2023/2024.** Vi definerer $Q(x) = x^3 + ax$, så er kravet i oppgaven at $Q(x) = 2 - b$ i eksakt to punkter, og at $Q(x) = -2 - b$ i eksakt to punkter. Dersom $a \geq 0$, er $Q(x)$ strengt voksende, så det er umulig. Derfor må $a < 0$, og grafen til $Q(x)$ blir omtrent som i figuren. Vi kan lese rett ut av figuren at det er bare to y -verdier (markert i rødt) som oppnås for nøyaktig to x -verdier hver. Fordi grafen til $Q(x)$ er symmetrisk om origo, er disse y -verdiene like store, bare med motsatt fortegn. Skal det være sant for $y = 2 - b$ og $y = -2 - b$, må $b = 0$, altså $Q(x) = P(x)$.



Tredjegradspolynomet $P(x) - 2$, med to reelle røtter $x_1 \neq x_2$, kan divideres med $(x - x_1)(x - x_2)$ uten rest. Kvantienten blir et førstegradspolynom. Siden $P(x) - 2$ ikke har flere røtter, må kvotienten være enten $x - x_1$ eller $x - x_2$. Vi antar det første. (Hvis ikke, så bare bytt om x_1 og x_2 .) Dermed er

$$P(x) = (x - x_1)^2(x - x_2) + 2 = x^3 - \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{-2x_1}x^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2)x - x_1^2x_2 + 2.$$

Siden $P(x)$ ikke har noe 2.-gradsledd, må $x_2 = -2x_1$, så dette forenkles til

$$P(x) = x^3 - 3x_1^2x + \underbrace{2x_1^3 + 2}_{2x_1^3 + 2}.$$

Men vi har sett at $P(x)$ ikke har noe konstantledd heller, så $2x_1^3 + 2 = 0$, og dermed er $x_1 = -1$. Altså er $P(x) = x^3 - 3x$, og det gir $P(8) = 8^3 - 3 \cdot 8 = 512 - 24 = 488$.

Et alternativ til første del av løsningen (symmetriargumentet som ledet til $b = 0$) er å utlede de to ligningene

$$P(x) = x^3 - 3x_1^2x + 2x_1^3 + 2, \quad P(x) = x^3 - 3x_3^2x + 2x_3^3 - 2.$$

Den første av disse fant vi ovenfor, og den andre finner vi på samme måte ved å faktorisere $P(x) + 2$ (etter kanskje å ha byttet om x_3 og x_4). Når vi sammenligner koeffisienten til førstegradsleddet i de to uttrykkene, ser vi at $x_3^2 = x_1^2$, så $x_3 = -x_1$ ($x_3 = x_1$ er jo umulig fordi $P(x_3) \neq P(x_1)$). Deretter sammenligner vi konstantleddene, altså $2x_1^3 + 2 = 2x_3^3 - 2$, det vil si $2x_1^3 + 2 = -2x_1^3 - 2$. Men da må jo $2x_1^3 + 2 = 0$, altså $x_1 = -1$ som før. 488



- (8) **Oppgave 4 2024/2025.** Dersom a og b er gitt, er også c entydig gitt, så vi trenger bare telle par (a, b) med $a^3 + b^2 < 100$. Fordi $5^3 = 125 > 100$, må $a \leq 4$. Dersom $a = 4$ skal $b^2 < 100 - 4^3 = 36$ (5 muligheter). Og $a = 3$ krever $b^2 < 100 - 3^3 = 73$ (8 muligheter). Med $a = 2$ må $b^2 < 100 - 2^3 = 92$ (9 muligheter), mens $a = 1$ gir $b^2 < 100 - 1^3 = 99$ (også 9 muligheter). Tilsammen $5 + 8 + 9 + 9 = 31$ muligheter. 31

- (8) **Oppgave 7 2024/2025.** Identiteten $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$ kan skrives om til $1/(a + 1) = (a - 1)/(a^2 - 1)$. Med $a = \sqrt[n]{7}$ gir det

$$\frac{1}{\sqrt[n]{7} + 1} = \frac{\sqrt[n]{7} - 1}{\sqrt[n]{7} - 1}.$$

Sett inn $n = 1, 2, 4, 8$ og 16 , og multipliser sammen alle ligningene. Om vi kaller den store brøken i oppgaven x , blir da

$$x = 6 \cdot \frac{\sqrt[2]{7} - 1}{\sqrt[1]{7} - 1} \cdot \frac{\sqrt[4]{7} - 1}{\sqrt[2]{7} - 1} \cdot \frac{\sqrt[8]{7} - 1}{\sqrt[4]{7} - 1} \cdot \frac{\sqrt[16]{7} - 1}{\sqrt[8]{7} - 1} \cdot \frac{\sqrt[32]{7} - 1}{\sqrt[16]{7} - 1} = \sqrt[32]{7} - 1$$

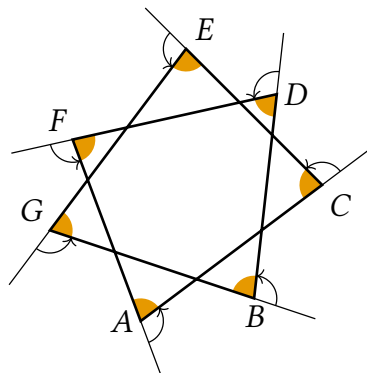
(merk at $\sqrt[16]{7} - 1 = 7 - 1 = 6$). Dermed er $(x + 1)^{96} = 7^{96/32} = 7^3 = 343$. . . 343



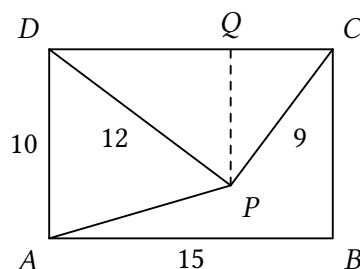
Geometri

- (9) **Oppgave 2 2005/2006.** Arealet av trapeset er $\frac{1}{2} \cdot (10 + 6) \cdot 4 = 32$. Trekanten ABP har høyde $4/2 = 2$ fra AB og areal $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10$. Trekanten PCD har høyde 2 fra CD , og areal $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$. Trekantene PQC og QBC har samme lengde av grunnlinjene og samme høyde fra PB , og dermed samme areal, som blir $\frac{1}{2}(32 - 10 - 6) = 8$ 8

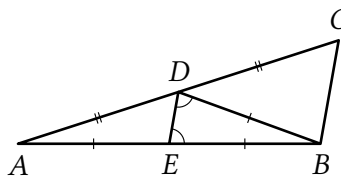
- (9) **Oppgave 4 2005/2006.** Følg veien $A-C-E-G-B-D-F-A$ rundt sjukanten slik at du ender opp i samme retning som du startet, la oss si fra A mot C , så har du i alt dreid to ganger mot klokka, altså i alt $Y = 2 \cdot 360^\circ$ mot venstre. Vi kaller Y ytre vinkelsum. Dette er summen av alle vinklene markert med en liten pil i figuren. Vi er interessert i indre vinkelsum I , altså summen av de skyggelagte vinklene i figuren. Men i hvert hjørne er indre og ytre vinkel komplementærvinkler, så summen av dem er 180° . Derfor er $I + Y = 7 \cdot 180^\circ$, så $I = 7 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ 540



- (9) **Oppgave 6 2005/2006.** Fordi $9^2 + 12^2 = 15^2$, er trekanten CPD rettvinklet. La Q være fotpunktet for høyden fra P på CD . Da er trekantene QDP og PDC formlike, og høyden fra AD i trekanten DAP er dermed $x = 12 \cdot 12/15 = 48/5$. Arealet av trekanten APD er $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 48/5 = 48$ 48

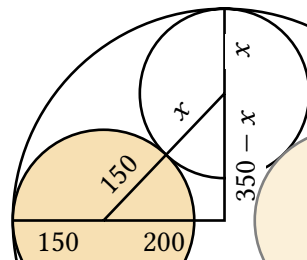


- (9) **Oppgave 3 2006/2007.** La E være et punkt på AB slik at DE er parallell med BC . Da er trekantene AED og ABC formlike, og vinkelen AED er 100° . Fordi AC er dobbelt så lang som AD , er AB dobbelt så lang som AE , som dermed har samme lengde som BE og BD . Så trekanten DBE er likebeint med vinklene D og E lik $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, og vinkelen ABD er $180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ 20

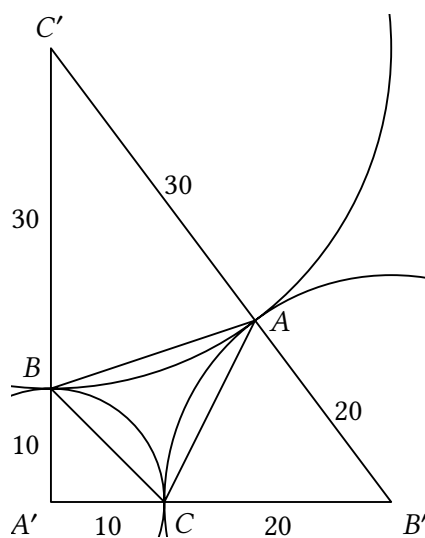




- (9) **Oppgave 6 2006/2007.** La x være radius i de små hvite sirklene. Sentrum i den store sirkelen, i en av de fargede og en av de små hvite sirklene danner en rett-vinklet trekant med kateter med lengde $350 - 150$ og $350 - x$ og hypotenus med lengde $150 + x$. Pytagoras' setning gir $40\,000 = (350 - 150)^2 = (x + 150)^2 - (350 - x)^2 = (x + 150 + 350 - x)(x + 150 - 350 + x) = 500(2x - 200)$, altså $2x - 200 = 80$, og $x = 140$ 140

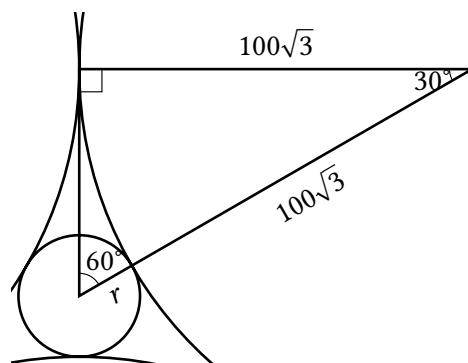


- (9) **Oppgave 9 2006/2007.** La A' , B' og C' være sentrum i de tre sirklene (se figur). Tangeringspunktet mellom to sirklene ligger på linja gjennom sentrene i de to sirklene (radien ut til tangeringspunktet er vinkelrett på tangenten, som er den samme for de to sirklene). Vinkelen A' er rett, da sidene i trekanten $A'B'C'$ har lengde 30, 40 og 50, og $30^2 + 40^2 = 50^2$. Vi finner arealet av trekanten ABC ved å trekke arealene av trekantene $A'BC$, $AB'C$ og ABC' fra arealet av trekanten $A'B'C'$, og vi får $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin B' - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \sin C' = 600 - 50 - 200 \cdot \frac{40}{50} - 450 \cdot \frac{30}{50} = 120$ 120



- (10) **Oppgave 5 2007/2008.** Ei linje som går gjennom sentrene til to tangerende sirklene, går også gjennom tangeringspunktet mellom sirklene. Ved å trekke en radius i den største sirkelen som går gjennom senteret i en av de mellomstore sirklene, ser en dermed at $R = r + 2 \cdot 100\sqrt{3}$, der R er radien i den store sirkelen.

En trekant med sentrene i to av de mellomstore sirklene og sentrum i den lille sirkelen som hjørner er likebeint, med vinkel 120° mellom de like lange sidene. En trekant med tangeringspunktet mellom to av de mellomstore sirklene, sentrum i den lille sirkelen og sentrum i en av de to nevnte mellomstore sirklene som hjørner er dermed rettvinklet og med én vinkel lik 60° (se figur). Hypotenusen har lengde $r + 100\sqrt{3}$ og kateten som er motstående til 60° -vinkelen har lengde $100\sqrt{3}$. Den andre kateten har lengde som er halvparten av hypotenusens, noe som er velkjent, men som lett ses ved å speile trekanten om

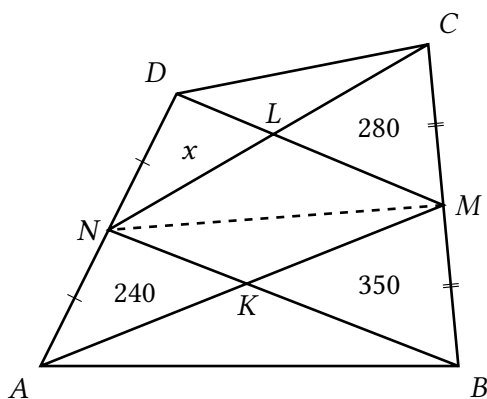




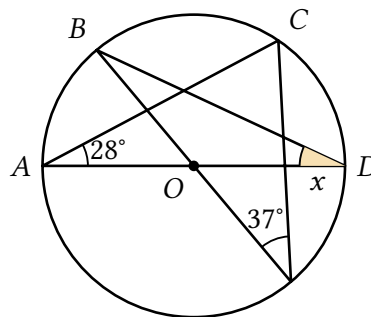
den lengste kateten slik at en likesidet trekant dannes.

Ved Pytagoras' setning er $(r + 100\sqrt{3})^2 = (100\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}(r + 100\sqrt{3}))^2$, som gir $\frac{\sqrt{3}}{2}(r + 100\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$, $r + 100\sqrt{3} = 200$, og dermed er $r + R = 2r + 2 \cdot 100\sqrt{3} = 2(r + 100\sqrt{3}) = 2 \cdot 200 = 400$ 400

- (10) **Oppgave 8 2007/2008.** La x være arealet av trekanten NLD . Trekantene ANM og DNM har like lang grunnlinje og høyde, og dermed samme areal. Det samme gjelder trekantene BMN og CMN . Summen av arealene av trekantene ANM og CMN er altså lik summen av arealene av trekantene DNM og BMN , det vil si at arealet av firkanten $AMCN$ er lik arealet av firkanten $BMDN$. Firkanten $KMLN$ er felles for de to firkantene, slik at $x + 350 = 240 + 280$, og $x = 170$ 170



- (10) **Oppgave 3 2008/2009.** Vinkelen x spenner over en bue på $2x$. Dette følger av at en sentralvinkel er dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue. (I dette tilfellet, der det ene vinkelbeinet er diameter i sirkelen, er det lett å vise: Trekanten DOB er likebeint, så vinkel B er lik x , og vinkel DOB er $180^\circ - 2x$. Dermed er komplementvinkelen AOB – sentralvinkelen som spenner over samme bue – lik $2x$.) Så buen AB er $2x$. Samme resonnement viser at buen BC er $2 \cdot 37^\circ$ og at buen CD er $2 \cdot 28^\circ$. Til sammen er de tre buene 180° , altså $2(x + 37^\circ + 28^\circ) = 180^\circ$, og $x = 25^\circ$ 25



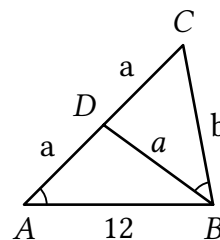
- (10) **Oppgave 7 2008/2009.** La de mellomstore sirklene ha radius $R = 15/\sqrt{\pi}$ og de små sirklene r . En rettvinklet trekant med hjørner i sentrene til den store sirkelen, en mellomstor og en liten sirkel har kateter med lengde $2R - r$ og R og hypotenus med lengde $R + r$. Altså er $(R + r)^2 = (2R - r)^2 + R^2$, som gir $2Rr = 4R^2 - 4Rr$, slik at $r = 2R/3 = 10/\sqrt{\pi}$. Det skyggelagte området får areal $\pi((2R)^2 - 2R^2 - 2r^2) = 2\pi(R^2 - r^2) = 2(15^2 - 10^2) = 250$ 250



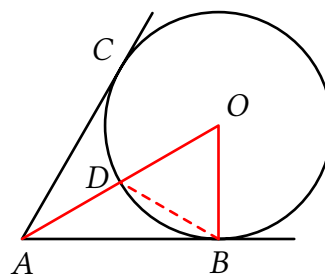
- (10) **Oppgave 9 2008/2009.** La de tre hjørnene ha koordinatsum $x + y$ henholdsvis a , b og c . Midtpunktene på de tre sidene har koordinatsum henholdsvis $a' = 23 + 32 = 55$, $b' = 8 + 41 = 49$ og $c' = 17 + 45 = 62$. Koordinatsummen til et midtpunkt på en side er lik gjennomsnittet av koordinatsummene til hjørnene på siden, slik at $2a' = b + c$, $2b' = c + a$ og $2c' = a + b$. Hvis vi adderer likningene, får vi $a + b + c = a' + b' + c' = 166$, slik at $a = 166 - 2a'$, $b = 166 - 2b'$ og $c = 166 - 2c'$. Den største av disse svarer til den minste av a' , b' , c' , altså $b = 166 - 2b' = 166 - 2 \cdot 49 = 68$ 68

- (10) **Oppgave 3 2009/2010.** Trekanten AEB har grunnlinje AE av lengde 8 og høyde 4 (AB og BC er like lange), og areal $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$, mens trekanten CDE har areal $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$. Trekanten BEC har dermed areal $90 - 16 - 32 = 42$ 42

- (11) **Oppgave 7 2009/2010.** La AD , BC og BD ha lengde henholdsvis a , b og x (da har også CD lengde a). Trekantene ABC og BDC er formlike, slik at $b/a = 2a/b$ og $x/12 = a/b$. Den første likningen gir $a^2/b^2 = 1/2$, og fra den andre får vi $x^2 = 12^2 a^2/b^2 = 12^2/2 = 72$ 72

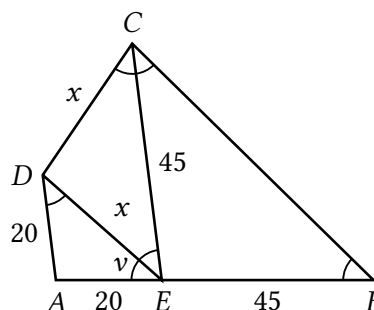


- (11) **Oppgave 5 2010/2011.** Tangeringslinja AB er vinkelrett på radien OB i sirkelen, så vinkelen ABO er rett. Det samme gjelder vinkelen ACO . De rett-vinklede trekantene ABO og ACO har samme hypotenus, OA , og de har en katet hver, OB og OC , av samme lengde, så de er kongruente, og vinklene OAB og OAC er like store, så vinkelen OAB er 30° , og AOB er 60° . Dermed er OA dobbelt så lang som OB (hvis vi speiler trekanten ABO om AB dannes en likesidet trekant). La D være skjæringspunktet mellom sirkelen og OA . Da er OD like lang som OB (begge er radier i sirkelen), altså halvparten så lang som OA . Men i den likebeinte trekanten BOD er $\angle BOD$ 60° , slik at den er likesidet, og også BD er halvparten så lang som OA , $420/2 = 210$ 210



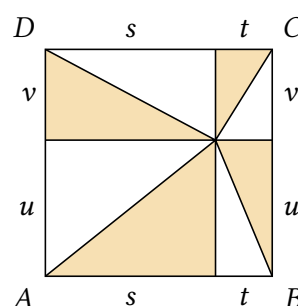


- (11) **Oppgave 9 2010/2011.** Trekantene DAE og CEB er formlike på grunn av de parallelle linjene. Fordi DAE er likebeint, er også CEB likebeint, og BE og CE har lengde $65 - 20 = 45$. La v være størrelsen av de to like vinklene AED og ADE . Da er vinklene EAD og BEC $180^\circ - 2v$. Vinkelen DEC er $180^\circ - v - (180^\circ - 2v) = v$. Det er oppgitt at CD og DE er like lange, slik at også trekanten CDE er likebeint med to vinkler lik v – og trekanten CDE er også formlik med de to nevnte trekantene. La x være lengden av CD . Formlikhet av DAE og CDE gir $20/x = x/45$, $x^2 = 20 \cdot 45$, $x = 30$ 30



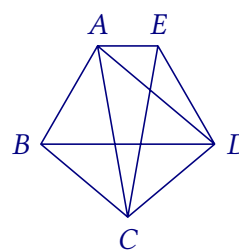
- (11) **Oppgave 4 2011/2012.** For et generelt indre punkt Q i et kvadrat $ABCD$ gjelder $AQ^2 + CQ^2 = BQ^2 + DQ^2$. Man kan se dette ved å anvende Pythagoras på hver av de fire fargede trekantene i figuren og legge sammen:

$$\begin{aligned} AQ^2 &= s^2 + u^2 & BQ^2 &= t^2 + u^2 \\ CQ^2 &= t^2 + v^2 & DQ^2 &= s^2 + v^2 \end{aligned}$$



Med $Q = P$ får vi $CP^2 = BP^2 + DP^2 - AP^2 = 2 \cdot (10\sqrt{5})^2 - 39 = 961 = 31^2$. 31

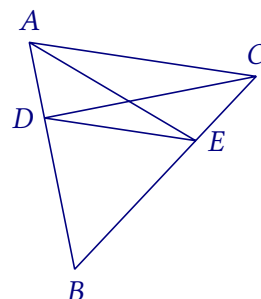
- (11) **Oppgave 6 2011/2012.** Trekantene EDC og ABC har en lik vinkel og to like sider, så de er kongruente. Spesielt er trekanten ACE likebent, slik at $\angle EAC = \angle AEC = 80^\circ$, og $\angle ACE = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$. Trekantene EDC og ABC er også likebente, så $\angle BAC = \angle BCA = \angle DEC = \angle DCE = 40^\circ$. Det gir $\angle ABC = \angle CDE = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$. Men vi har også $\angle BCD = 40^\circ + 20^\circ + 40^\circ = 100^\circ$. Dermed er trekantene ABC og BCD kongruente (to like sider og en lik vinkel), så $AC = BD$. Dette betyr i sin tur at trekantene ACD og DBA er kongruente, siden de har tre like sider. Dermed er $\angle ADC = \angle DAB$. Vinkelsummen i firkanten $ABCD$ er 360° , det vil si $2 \cdot \angle DAB + 2 \cdot 100^\circ = 360^\circ$, altså $\angle DAB = 80^\circ$. Til sist er da $\angle CAD = \angle DAB - \angle BAC = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$ 40



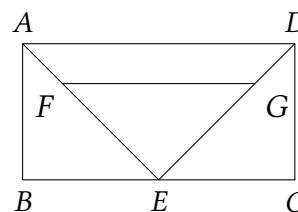
Hver vinkel i figuren er et heltallig multiplum av 20° .



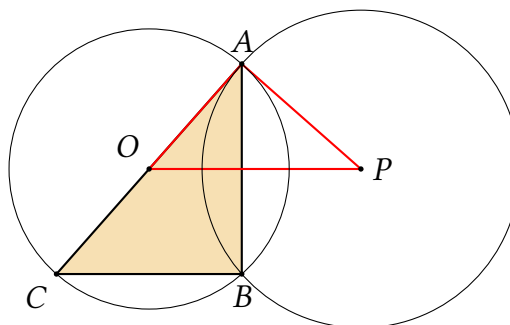
- (11) **Oppgave 9 2011/2012.** For enkelhets skyld skriver vi $|XYZ|$ for arealet av trekanten XYZ . Trekantene ABC og DBE er likeformede, og den sistnevnte er $\frac{2}{3}$ så stor i hver retning. Dermed blir $|DBE| = \frac{4}{9}|ABC| = 200$, så firkanten $ADEC$ har areal $450 - 200 = 250$. Linjestykkene AC og DE er parallelle, så høyden fra AC til E er lik høyden fra DE til C . Dermed er $|DEC| = \frac{2}{3}|ACE|$ siden forholdet mellom grunnlinjene DE og AC er $\frac{2}{3}$. Arealet av firkanten $ADEC$ kan nå skrives $250 = |ACD| + |DEC| = \frac{5}{3}|ACD|$, så $|ACD| = 150$. Til sist ser vi at trekantene AFC og EDC er likeformede (tre like vinkler), med $EDC \frac{2}{3}$ så stor som AFC . Spesielt er $DF = \frac{2}{3}FC$, så $DF = \frac{2}{5}DC$. Trekantene AFD og ACD har samme høyde fra A , mens forholdet mellom grunnlinjene er $FD/CD = \frac{2}{5}$, så $|AFD| = \frac{2}{5}|ACD| = 60$ 60



- (11) **Oppgave 5 2012/2013.** Trekantene FEG og AED blir likeformede, og forholdet mellom arealene blir kvadratet av det lineære størrelsesforholdet mellom de to. Det betyr at hver side i FEG må være $1/\sqrt{2}$ ganger tilsvarende sidekant i AED . Ved Pytagoras finner vi $EA = \sqrt{2} \cdot 120$, så $EF = 1/\sqrt{2} \cdot EA = 120$. 120



- (12) **Oppgave 7 2012/2013.** Vi legger merke til at $(10\sqrt{7})^2 + 30^2 = 700 + 900 = 1600 = 40^2$, slik at trekanten OAP er rettvinklet. Det følger at vinklene OPA og CAB er like store, siden vinkelbena står parvis vinkelrett på hverandre.

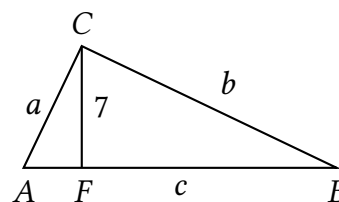


Linjestykket CB er parallelt med OP . Spesielt er vinkelen ABC rett. Det følger at trekantene ABC og PAO er likeformede, for begge har en rett vinkel, og like vinkler OPA og CAB . Vi får $BC/AO = CA/OP$, altså $BC = AO \cdot CA/OP = 10\sqrt{7} \cdot 20\sqrt{7}/40 = 35$ 35

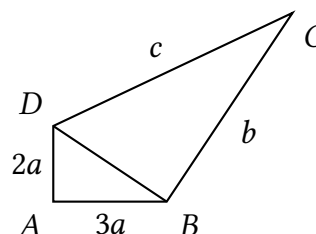


- (12) **Oppgave 9 2012/2013.** Oktaederet består av to pyramider der grunnflaten er et kvadrat med areal $(\sqrt{6})^2 = 6$. Legg et vertikalt snitt gjennom toppen av pyramiden og midten av to motstående sider av grunnflaten. Dette snittet deler den likesidede trekanten i to, og hver halvpart har sider med lengder $\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ og $\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Så snittflaten er en likebent trekant med grunnlinje $\sqrt{6}$ og to sidekanter av lengde $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Høyden i denne trekanten, og derfor av pyramiden, blir kvadratroten av $(\frac{3}{2}\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{6})^2 = 3$. Volumet av pyramiden blir derfor $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Volumet av oktaederet blir dobbelt så stort, og kvadratet av volumet blir $16 \cdot 3 = 48$ 48

- (12) **Oppgave 3 2013/2014.** Med betegnelser som i figuren har vi $a^2 + b^2 = c^2$ og $a + b + c = 42$. Fra den siste av disse får vi $(a + b)^2 = (42 - c)^2$. Ganger vi ut kvadratene og trekker fra den første ligningen, får vi $2ab = 42^2 - 84c$. Trekantene ABC og ACF er formlike, slik at $b/c = 7/a$, altså $ab = 7c$. Setter vi det inn i ligningen foran får vi $14c = 42^2 - 84c$, med løsningen $c = 18$ 18

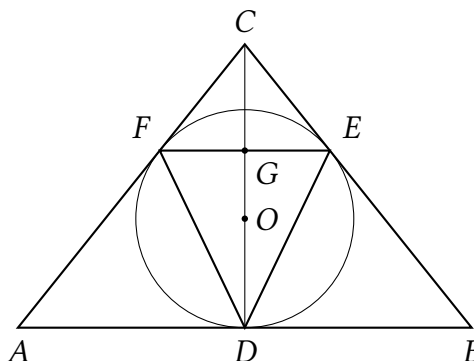


- (12) **Oppgave 6 2013/2014.** De to rettvinklede trekantene ABD og BCD har siden BD felles. Pytagoras anvendt på de to trekantene gir derfor $(2a)^2 + (3a)^2 = c^2 - b^2$, med andre ord $13a^2 = (c - b)(c + b)$. Fordi 13 er et primtall, må 13 gå opp i enten $c - b$ eller $c + b$. For et minimalt resultat prøver vi oss frem med $c + b = 13$, slik at vi må ha $a^2 = c - b$. Da blir a minst mulig om vi velger $a = 1$, og dermed $b = 6$ og $c = 7$, med $a + b + c = 14$. Det er klart at vi ikke kan få en mindre sum ved å la $b + c$ være et større multiplum av 13. Likedan, om 13 går opp i $c - b$ må $c \geq 14$, og summen blir større. 14

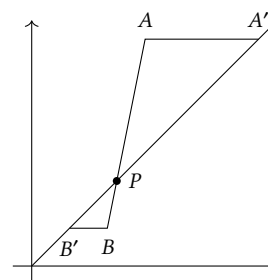




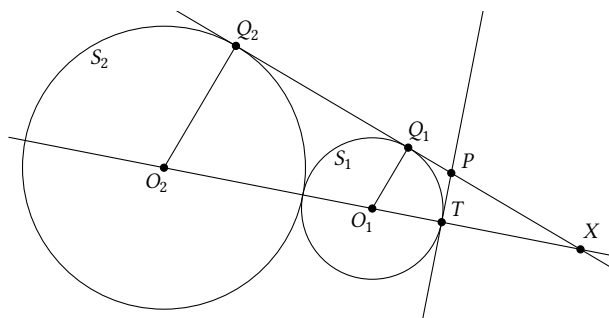
- (12) **Oppgave 9 2013/2014.** Vi har $AF = AD = \frac{10}{2} = 5$, fordi AD og AF tangerer samme sirkel i henholdsvis D og F (du kan enklest se det ved å sjekke at trekantene ADO og AFO er kongruente). Så $FC = 8 - 5 = 3$. De to trekantene FEC og ABC er formlike med lengdeforhold $3 : 8$, og spesielt er $FE = \frac{3}{8}AB$. Vi har også forholdet $3 : 8$ mellom høydene til FEC og ABC , altså $CG = \frac{3}{8}CD$, og derfor $DG = \frac{5}{8}CD$. Vi finner nå $\text{areal}(DEF) = \frac{1}{2}FE \cdot DG = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}AB \cdot \frac{5}{8}CD = \frac{15}{64} \text{areal}(ABC)$, og $\frac{64}{15} \cdot 120 = 512$ 512



- (12) **Oppgave 3 2014/2015.** La $A' = (1440, 1440)$ og $B' = (2, 2)$. Da er linjestykkene BB' og AA' parallelle, så de to trekantene PAA' og PBB' er likeformet, og dermed er $PA/PB = AA'/BB' = (1440 - 720)/(4 - 2) = 360$. Av praktiske grunner er ikke punktene i figuren plassert i henhold til oppgaven, men prinsippet er det samme. 360



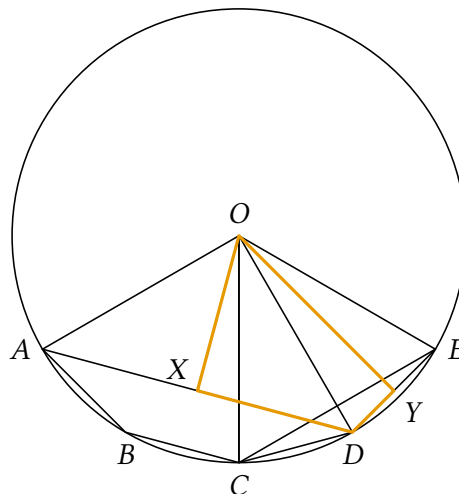
- (13) **Oppgave 8 2014/2015.** I figuren er trekantene XQ_2O_2 , XQ_1O_1 og XTP likeformet, med størrelsesforhold $2 : 1$ mellom de to første. Spesielt er XO_1 halvparten så lang som XO_2 , og dermed like lang som O_1O_2 , altså 90 enheter lang. Pythagoras gir $(XQ_1)^2 = 90^2 - 30^2 = 8 \cdot 30^2$, og derfor $(O_1Q_1/XQ_1)^2 = 1/8$. Da blir også $(PT/XT)^2 = 1/8$, så $(PT)^2 = (XT)^2/8 = 60^2/8 = 450$ 450



- (13) **Oppgave 2 2015/2016.** Omsirkelen har hypotenusen BC som diameter fordi $\angle BAC = 90^\circ$. Siden arealet til en sirkel med diameter d er $\frac{\pi}{4}d^2$, gir Pythagoras at arealet til omsirkelen er summen av arealene til sirklene med diameter AB og AC , altså $283 + 282 = 565$ 565

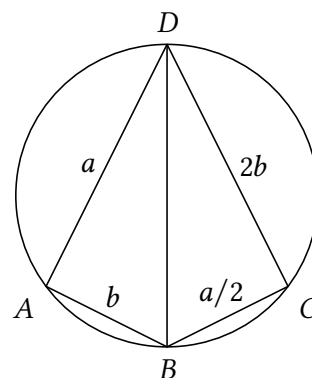


- (13) **Oppgave 4 2015/2016.** Dersom senteret til sirkelen kalles O , og X og Y er midtpunktene på henholdsvis AD og DE , følger at $\angle XOY = 60^\circ$, fordi summen av vinklene i firkanten $OXDY$ er 360° og de andre vinklene er 90° , 120° og 90° . Ettersom OX og OY er symmetriakser i de likebente trekantene AOD og DOE , er $\angle AOE$ dobbelt så stor, altså 120° . Det følger at hver av sirkelbuene AB , BC , CD og DE spenner over 30° av sirkelen. Summen av vinklene i den likebente trekanten COD er 180° , så $\angle CDO = (180^\circ - 30^\circ)/2 = 75^\circ$. Det samme gjelder $\angle EDO$, og summen av de to blir $\angle CDE = 150^\circ$.



Alternativt kan man utnytte at $\angle ADE = 120^\circ$ er en periferivinkel, og den tilhørende dobbelt så store sentralvinkelen er $\angle EOA$. Men dette blir sirkelbuen fra E til A over toppen av figuren, så sirkelbuen fra A gjennom B , C og D til E blir $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$. Deretter fortsetter løsningen som ovenfor. 150

- (13) **Oppgave 9 2015/2016.** Siden $\angle BAD$ er rett, er BD en diameter til sirkelen. Men av det følger at også $\angle BCD$ er rett. Pytagoras anvendt på de rettvinklede trekantene ABD og CBD gir at $a^2 + b^2 = (a/2)^2 + (2b)^2$, slik at $a = 2b$. Begge de to rettvinklede trekantene har areal $\frac{1}{2}ab = b^2$, og dermed blir det totale arealet til firkanten lik $2b^2$. For at dette arealet skal være mindre enn 1000, må $b^2 < 500$. Siden $22^2 < 500 < 23^2$, kan heltallet b maksimalt være 22, og arealet blir da $2 \cdot 22 \cdot 22 = 2 \cdot 484 = 968$.



..... 968

- (13) **Oppgave 2 2016/2017.** La katetene i trekanten ha lengde a og b , og hypotenusen ha lengde c . Pytagoras gir at $a^2 + b^2 = c^2$. Videre er $ab = 2 \cdot 400 = 800$ og $a + b + c = 100$. Nå blir

$$(a + b)^2 = (100 - c)^2 = 10000 - 200c + c^2,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 1600,$$

og derfor $200c = 10000 - 1600 = 8400$, altså $c = 42$ 42

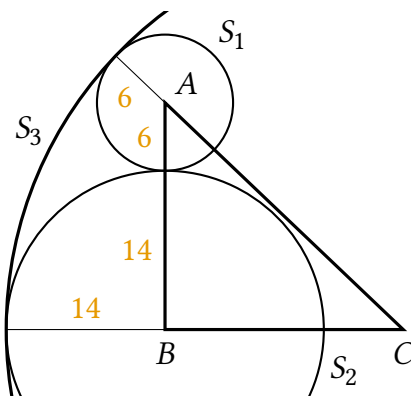


- (14) **Oppgave 5 2016/2017.** På grunn av de parallelle linjene er forholdet mellom arealene til høyre og til venstre for delelinjen fra hjørnet i figuren konstant. Hvis A er arealet til det mørke området nederst til høyre, og B er arealet til området øverst til venstre, er altså

$$A : 12 = 700 : B = 210 : 60 = 7 : 2.$$

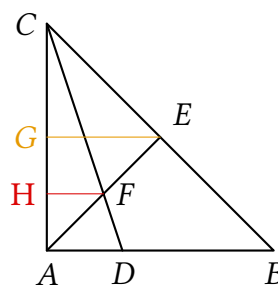
Dette gir $A = 42$ og $B = 200$, slik at $A + B = 242$ 242

- (14) **Oppgave 9 2016/2017.** La A , B og C være de tre sirkelsentrene (se figuren). Dersom r er radien til S_3 , har trekanten ABC sider av lengde $6 + 14 = 20$, $r - 14$ og $r - 6$. Pytagoras gir $20^2 + (r - 14)^2 = (r - 6)^2$, med løsning $r = 35$. (Det kunne tenkes at S_1 ligger inni S_2 , men da måtte alle de tre sirkelparene tangere hverandre i samme punkt, og så ville sirkelsentrene ligget på linje i stedet for å være hjørner i en rettvinklet trekant.)



..... 35

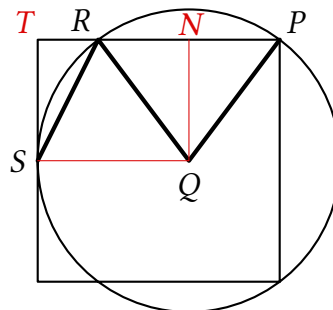
- (14) **Oppgave 1 2017/2018.** Trekk normaler EG og FH på siden AC som vist i figuren. Så er $CG = \frac{1}{2}AC$ (fordi trekantene ABC og GEC er likeformede), og på samme måte er $AH = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{4}AC$. Trekanten AFH har vinkler 45° , 45° og 90° , så den er likebent, og $HF = AH = \frac{1}{4}AC$. Så blir $CH/HF = 3$, og fordi trekantene CHF og CAD er likeformede, blir $AD = \frac{1}{3}AC = 240$.



..... 240



- (14) **Oppgave 7 2017/2018.** Trekk en normal fra Q til N på PR . Fordi sirkelen tangerer kvadratsiden gjennom S , er linjen SQ ortogonal på denne siden, så firkanten $SQNT$ er et rektangel. Spesielt er $TN = SQ = r$ (sirkelradien), så $PN = 32 - r$. Tangeringspunktet S ligger midt på sin side av kvadratet, fordi de to motstående hjørnene begge ligger på sirkelen. Pytagoras på trekanten PNQ gir da $(32 - r)^2 + 16^2 = r^2$, med løsning $r = 20$. Fordi trekanten PQR er likesidet, blir N midtpunktet på PR . Dermed blir $PR = 2PN = 2 \cdot (32 - r) = 24$, så $TR = 32 - 24 = 8$. Pytagoras på trekanten RTS gir $RS^2 = 8^2 + 16^2 = 320$. Dermed er $PQ + QR + RS = 20 + 20 + \sqrt{320}$, som blir 58 etter avrunding til nærmeste heltall. Det er fordi $18^2 = 324$, slik at



$$0 < 18 - \sqrt{320} = \frac{(18 - \sqrt{320})(18 + \sqrt{320})}{18 + \sqrt{320}} = \frac{4}{18 + \sqrt{320}} < \frac{1}{2},$$

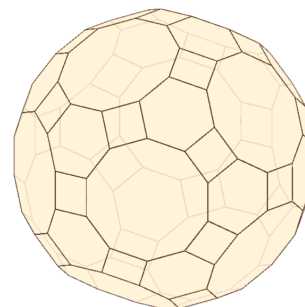
så $\sqrt{320}$ avrundet til nærmeste heltall er lik 18. 58

- (15) **Oppgave 2 2018/2019.** Trekk en linje fra et hjørne i tikanten (for eksempel A) til hvert av de andre hjørnene med unntak av nabohjørnene (B og J). Disse sju linjene deler tikanten opp i åtte trekkanter. Vinkelsummen i hver av trekantene er 180° , og den totale vinkelsummen i tikanten blir summen av vinkelsummene til de åtte trekantene, altså $8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$. Hver av de fem vinklene F, G, H, I og J er høyst 179° , så $F + G + H + I + J \leq 5 \cdot 179^\circ = 895^\circ$, og $A + B + C + D + E = 1440^\circ - (F + G + H + I + J) \geq 1440^\circ - 895^\circ = 545^\circ$. 545



- (15) **Oppgave 10 2018/2019.** Hvert hjørne i polyederet er også et hjørne i hver av sideflatene som møtes i det hjørnet. Summen av vinklene i disse hjørnene må være mindre enn 360° . Fordi alle sideflatene har hjørner med vinkel 90° eller større, kan ikke fire eller flere sideflater møtes i et hjørne. Men uansett må minst tre sideflater møtes i hvert hjørne, så *eksakt* tre sideflater møtes i hvert hjørne. Sideflatene har til sammen $30 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 12 \cdot 10 = 360$ hjørner, så polyederet har $360/3 = 120$ hjørner.

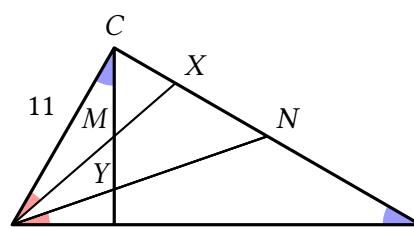
Ved å forfølge argumentet for at kun tre sideflater møtes i hvert hjørne, kommer man til at en kvadratisk side, en sekskantet og en trekantet side møtes i hvert hjørne. Vi vet ikke om det resulterende polyederet har et norsk navn, men på engelsk er det blant annet kjent under navnet *great* (eller *truncated*) *rhombicosidodecahedron*.



Den som kjenner til *Eulers formel* $V - E + F = 2$ for konvekse polyedere, der V er antall hjørner (engelsk *vertices*), E er antall kanter (*edges*) og F er antall sider (*faces*), kommer raskere frem til svaret: Her er $F = 30 + 20 + 12 = 62$ og $E = 180$, og dermed $V = 120$ 120

- (15) **Oppgave 4 2019/2020.** Linjen må gå gjennom sentrum i parallelogrammet, det vil si punktet $(\frac{5}{2}, \frac{83}{2})$. Stigningstallet blir $(\frac{83}{2} - 34)/(\frac{5}{2} - 2) = 15$. Punktet $(2, 34)$ ligger på diagonalen gjennom $(0, 4)$ og $(5, 79)$, med ligning $y = 15x + 4$. . . 15

- (15) **Oppgave 10 2019/2020.** Trekantene ACD og ABC er formlike, fordi de har en rett vinkel hver og en felles vinkel i A . Spesielt er $\angle ACD = \angle ABC$ (blå i figuren). Du kan også se dette direkte fordi vinkelbena står parvis vinkelrett på hverandre).

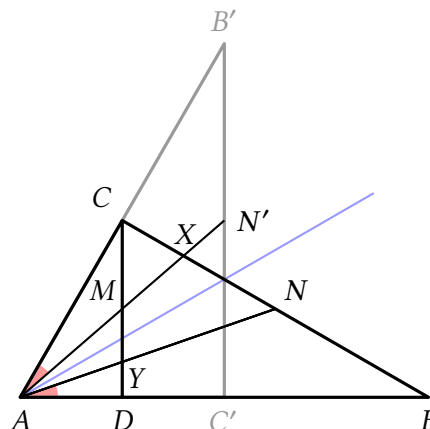


Siden vi nå vet at $|CD|/|AC| = |BC|/|AB|$, er også $|CM|/|AC| = |BN|/|AB|$, fordi M og N er midtpunkter på CD og BC . Men så er også trekantene ACM og ABN formlike, på grunn av like vinkler (blå) og likt lengdeforhold mellom sidene ved disse vinklene. Spesielt er $\angle MAC = \angle BAN$ (røde i figuren).

- ◇ Det følger av dette at trekantene ADY og ACX er formlike: De har en rett vinkel hver i tillegg til de røde vinklene. Størrelsesforholdet mellom dem er $|AD|/|AC| = \frac{1}{2}$, siden CAD er en 30° – 60° – 90° -trekant. Men dermed er også $|YD| = \frac{1}{2}|CX|$, og til slutt $(|XB| + 2|YD|)^2 = (|XB| + |CX|)^2 = |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 = 22^2 - 11^2 = 363$.

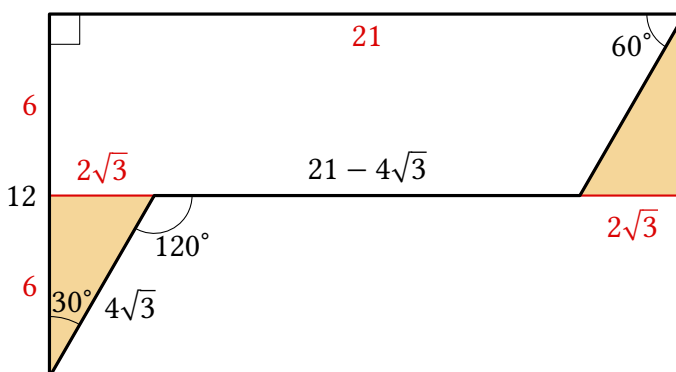


Alternativ løsning: Speilingen av trekanten ABC om halveringslinjen i $\angle BAC$ blir en trekant $AB'C'$. På grunn av de gitte vinklene er $|AC| = \frac{1}{2}|AB|$, så C' er midtpunktet på AB , og C er midtpunktet på AB' . Speilingen N' av midtpunktet N på BC er midtpunktet på $B'C'$. Siden trekantene $AB'C'$ og ACD er likeformede, vil linjestykket AN' skjære CD i midtpunktet M , og derfor også CB i X . De røde vinklene i figuren er like, på grunn av symmetrien: $\angle B'AN' = \angle BAN$. Resten er som siste avsnitt ($\diamond$) i den første løsningen. 363



(15) Oppgave 2 2020/2021.

Denne figuren har korrekte vinkler og mål. Fordi $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ og vi har en rett vinkel i øvre venstre hjørne, er de to horisontale linjene parallelle. Den skyggelagte trekanten til venstre har vinkler 30° , 60° og 90° , og sidelengder $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ og 6, som vist. Den kan flyttes over til det skyggelagte området til høyre, og den resulterende figuren er et 21×6 -rektangel. 126

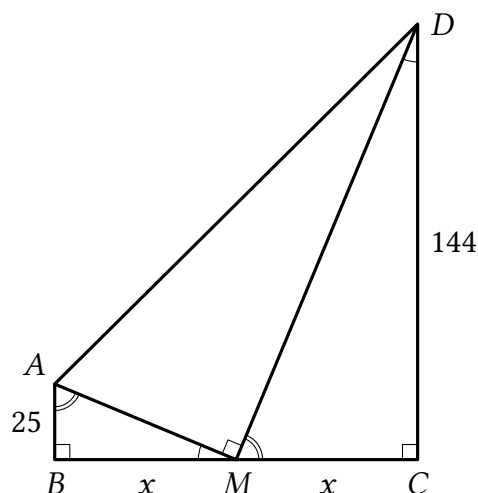


(16) Oppgave 5 2020/2021. Om kubens sidekant $2a$ og kule radius $r = 2^{2/3} \cdot 3^{3/2}$, er $3a^2 = r^2 = 2^{4/3} \cdot 3^3$, altså $a = 2^{2/3} \cdot 3$.

Det innskrevne oktaederet er satt sammen av to pyramider med høyde a og en grunnflate som er et kvadrat med sidekanter $a\sqrt{2}$. Oktaederet har volum $2 \cdot \frac{1}{3}(a\sqrt{2})^2 \cdot a = \frac{4}{3}a^3 = 16 \cdot 9 = 144$ 144



- (16) **Oppgave 4 2021/2022.** De likeformedede trekantene gir at $25/x = x/144$, der $x = |BM| = |MC|$. Dermed er $x^2 = 25 \cdot 144$, så $x = 5 \cdot 12 = 60$. Likeformethet gir også like vinkler som antydnet i figuren, og fordi vinkelsummen i ABM er 180° , må vinkelen AMD være rett. Nå kommer vi i mål med gjentatt bruk av Pytagoras: $|AM|^2 = 25^2 + 60^2 = 5^2(5^2 + 12^2) = 5^2 \cdot 169$, så $|AM| = 5 \cdot 13$. På samme måte er $|MD|^2 = 60^2 + 144^2 = 12^2(5^2 + 12^2) = 12^2 \cdot 169$, så $|MD| = 12 \cdot 13$. Til sist er $|AD|^2 = |AM|^2 + |MD|^2 = (5^2 + 12^2) \cdot 13^2 = 13^4$, så $|AD| = 13^2 = 169$ 169

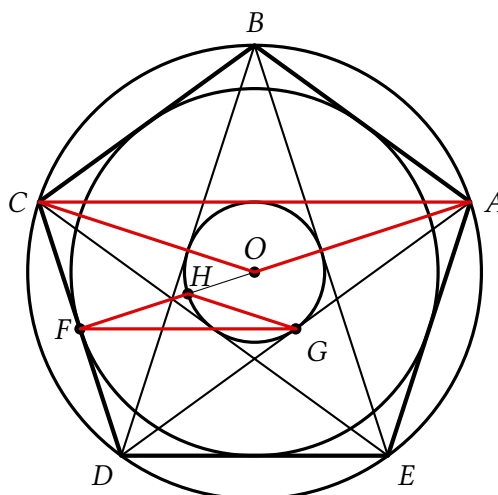


- (16) **Oppgave 10 2021/2022.** Her får vi bruk for periferivinkel-setningen et par ganger. For eksempel er $\angle COD = 72^\circ$, så $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = 36^\circ$.

I figuren er F og G midtpunktet på henholdsvis CD og AD . Linjestykket AF skjærer den minste sirkelen i H . Dette linjestykket halverer $\angle CAD$, så $\angle FAC = 18^\circ$

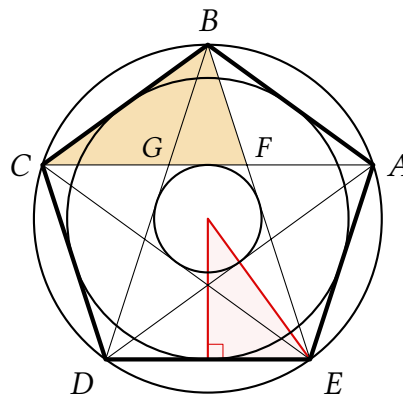
Fordi F og G er midtpunkter på to av sidene i trekanten ACD , er $FG \parallel AC$. Men da er $\angle GFH = \angle FAC = 18^\circ$.

Fordi $\angle GOA = 72^\circ$, gir periferivinkel-setningen at $\angle GHA = 36^\circ$. Vi har $\angle GFH + \angle FGH = \angle GHA$, så $\angle FGH = 18^\circ$. Altså er trekanten FHG likebent, og derfor likeformet med AOC , siden den også er likebent, og de to har en felles vinkel. Størrelsesforholdet mellom de to trekantene er $|AC|/|FG| = 2$, igjen fordi F og G er midtpunkter på to av sidene i trekanten ACD . Men så er også $|OA|/|HF| = 2$. Men $|OA| = 1814$, så $|HF| = 907$. Det er da også forskjellen mellom radiene til de to innskrevne sirklene. 907





Alternativ løsning (skisse): En mer likefrem (men også mer omstendelig) tilnærming til problemet deler det opp i to trinn: Beregne størrelsesforholdet mellom de to innskrevne sirkelene, som er det samme som størrelsesforholdet mellom de to femkantene, og beregne størrelsesforholdet mellom den innskrevne og den omskrevne sirkelen til en regulær femkant.



Det viser seg at disse to størrelsesforholdene er henholdsvis $G + 1$ og $G/2$, der $G = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618 \dots$ er det gyldne snitt.

Det første av disse forholdene finner man ved å betrakte likeformede trekanter med vinkler 72° , 72° og 36° i figuren, spesielt BCF og FBG .

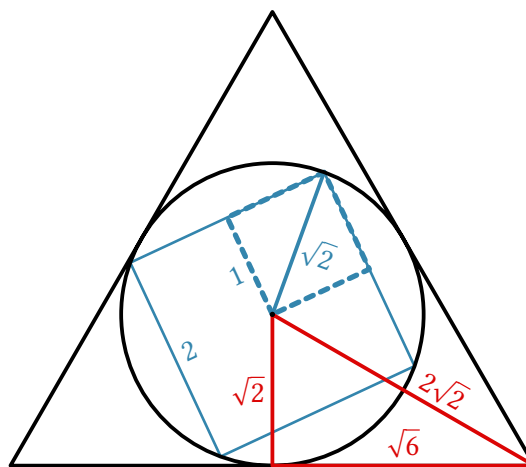
Det andre forholdet finner man ved hjelp av den røde trekanten i figuren. Vi overlater til leseren å (prøve å) fylle inn detaljene.

Men vi tar med den siste delen av beregningen: Den største innskrevne sirkelen får radius $1814 \cdot G/2 = 907 G$, så den minste sirkelen får radius $907 G/(G + 1)$. Det gyldne snitt oppfyller ligningen $G^2 = G + 1$, så

$$G - \frac{G}{G + 1} = \frac{G^2 + G - G}{G + 1} = \frac{G^2}{G + 1} = 1,$$

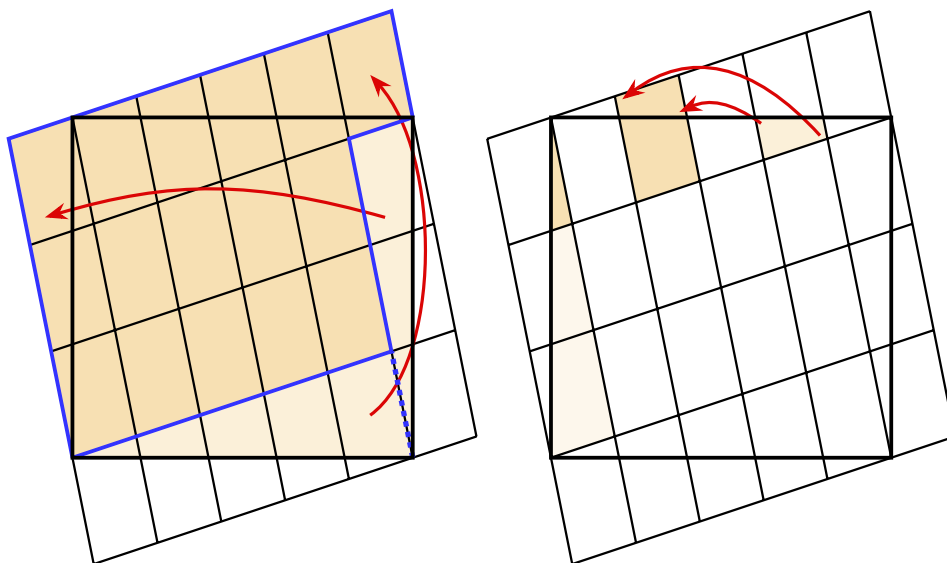
slik at differansen mellom de to radiene rett og slett blir 907. 907

- (16) **Oppgave 2 2022/2023.** Sirkelen har radius $r = \sqrt{2}$, som du ser fra det stiplede kvadratet i figuren. Den røde trekanten er en 30–60–90-trekant, så hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste kateten, altså $2\sqrt{2}$. Pytagoras gir da $\sqrt{6}$ for den lange kateten. (Eller du kan benytte at forholdet mellom katetene i en 30–60–90-trekant er $\sqrt{3}$.) Side-lengden i den likesidete trekanten er dobbelt så stor, altså $2\sqrt{6}$. Kvadratet av dette blir 24. 24





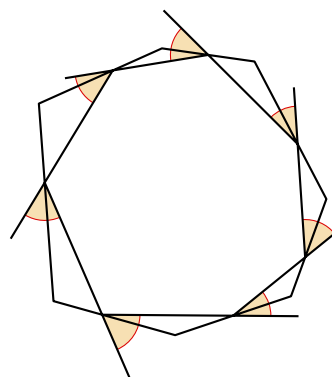
- (16) **Oppgave 10 2022/2023.** Utvid det skrå rutenettet litt for å se bedre hva som foregår. Ved å flytte to trekanter ut av kvadratet som vist i figuren til venstre, får vi akkurat 16 småfirkanter fra rutenettet. Så dersom hver småfirkant har areal A , har kvadratet areal $16A$.



Om vi flytter den høyre delen av det skyggelagte området og roterer den 180° som vist i figuren til høyre, får vi en hel småfirkant, areal A .

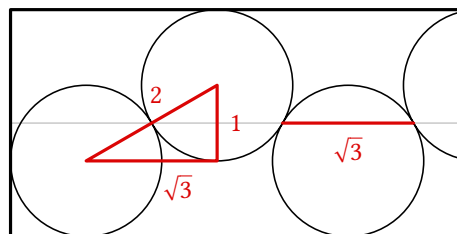
Om vi forstørrer den lille trekanten oppe til venstre med en faktor 3 (så arealet blir ni ganger så stort), får vi halvparten av tre småfirkanter, altså med areal $\frac{3}{2}A$. Det betyr at den lille trekanten har areal $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}A = \frac{1}{6}A$, så hele det opprinnelig skyggelagte området har areal $\frac{7}{6}A$. Det er oppgitt at dette arealet er 70, så kvadratet har areal $16A = 16 \cdot \frac{6}{7} \cdot 70 = 960$ 960

- (17) **Oppgave 2 2023/2024.** Forleng sidene i den indre sjukanten. Fordi toppvinkler er like store, kan vi flytte halvparten av de markerte vinklene som vist i figuren. Når du nå går rundt den indre sjukanten, svinger du til venstre i hvert hjørne med en vinkel lik den markerte. Ettersom du svinger til venstre i alt 360° på rundturen, er det også summen av vinklene. 360





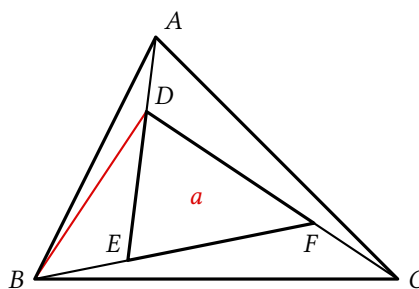
- (17) **Oppgave 4 2023/2024.** Siden den minste dimensjonen er lik diameteren av en klinkekule, handler det om å pakke inn sirkelskiver med radius 1 i et rektangel med dimensjoner 3×100 . Det mest effektive må være å pakke dem som i figuren, med senteravstand $\sqrt{3}$ i lengderetningen.



Hvis du pakker inn $k + 1$ klinkekuler, fyller de i alt $2 + k\sqrt{3}$ i lengderetningen av esken. Vi må finne det største tallet k slik at $2 + k\sqrt{3} \leq 100$, det vil si $3k^2 \leq 98^2 = 9604$, med andre ord $k^2 \leq 3201\frac{1}{3}$. Det er klart at $k = 50$ oppfyller ulikheten og $k = 60$ ikke gjør det. Litt prøving viser at $56^2 = 3136$ mens $57^2 = 3249$, så største mulige verdi er $k = 56$. Husk så at dette gir $k + 1 = 57$ klinkekuler. 57

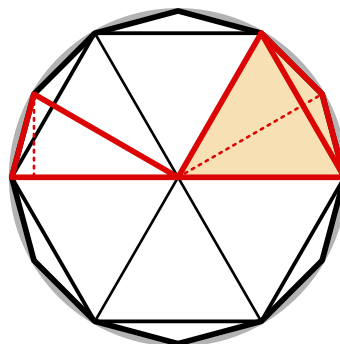
Skal vi være litt pedantiske, så har vi bare sannsynliggjort at vi ikke kan få inn mer enn 57 klinkekuler, men vi har ikke *bevist* det. For å gjøre det, ser vi på senterlinjen i rektangelet. Enhver sirkelskive med radius 1 innenfor rektangelet dekker minst en lengde $\sqrt{3}$ av denne linjen (se det markerte linjestykket i den tredje sirkelskiven i figuren). Fordi $58\sqrt{3} > 100$, er det ikke plass til 58 sirkelskiver uten overlap. (Ulikheten følger av $58^2 \cdot 3 = 10092 > 100^2$.)

- (17) **Oppgave 10 2023/2024.** Skriv a for arealet av trekanten DEF . Trekk et ekstra linjestykke BD . Trekantene DEF og BED har samme høyde målt fra det felles toppunktet D , mens grunnlinjen BE er halvparten så lang som EF , så arealet av BED er $\frac{1}{2}a$. På samme måte (toppunkt B) har ABE areal $\frac{3}{2}$ ganger arealet til BED , altså lik $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a$. Ut fra samme resonnement må trekantene BCF og CAD også ha areal $\frac{3}{4}a$. Trekanten ABC har derfor areal $a + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a = \frac{13}{4}a$. Altså har vi $702 = \frac{13}{4}a$, og dermed $a = \frac{4 \cdot 702}{13} = 216$ 216





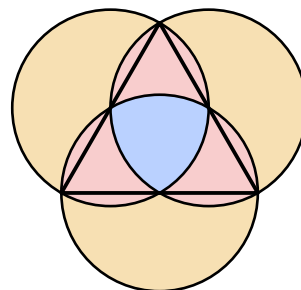
- (17) **Oppgave 5 2024/2025.** Innskriv en regulær sekskant ved å forbinde annethvert hjørne i tolvkanten. Sekskanten er satt sammen av seks likesidede trekanten, alle med sidekant 12. Del tolvkanten i seks like deler. Én av dem er skyggelagt i figuren. Den er satt sammen av to trekanten med en felles side (en sekskantside). Høydene til de to trekantene over den felles siden er tilsammen lik 12, så arealene av de to summerer seg til $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72$. Arealet av hele tolvkanten blir $6 \cdot 72 = 432$.



Alternativ løsning: Del opp tolvkanten i tolv likebente trekanten, hver med toppvinkel 30° og to sidekanter av lengde 12. En av dem er vist i figuren med rødt omriss i venstre halvdel av figuren. Høyden i trekanten (stiplet) er 6, siden den er den korte kateten i en 30-60-90-trekant med hypotenus 12. Så arealet er $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$, og hele tolvkanten har areal $12 \cdot 36$ 432

- (17) **Oppgave 8 2024/2025.** Her er figuren i oppgaven igjen: I tillegg til arealet A_1 (beige) og A_3 (lyseblått) har vi fargelagt arealet A_2 i lyserødt. Det består av de punktene som er innenfor to av sirklene, men ikke alle tre.

Om vi adderer arealene til de tre sirklene, har vi fått med A_1 én gang, A_2 to ganger, og A_3 tre ganger. Dermed er $A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 = 27\pi$.



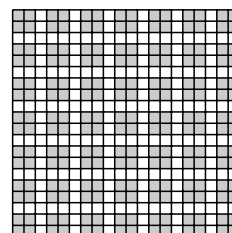
Figuren som helhet består av tre halvsirkler (totalt areal $\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{27}{2}\pi$) og den gitte trekanten, med sidekant 6 og høyde $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$, altså areal $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Men dette arealet er også summen av de tre fargede områdene: $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{27}{2}\pi + 9\sqrt{3}$.

Tar vi to ganger denne ligningen og trekker fra ligningen i andre avsnitt, får vi $A_1 - A_3 = 18\sqrt{3}$. Så blir $(A_1 - A_3)^2 = (18\sqrt{3})^2 = 972$ 972



Kombinatorikk og sannsynlighet

- (18) **Oppgave 10 2005/2006.** Vi markerer to seter med samme bokstav hvis de brukes av et ektepar. Vi har da disse 5 mulighetene hvis ingen ektefeller skal sitte ved siden av hverandre: $ABACBC$, $ABCABC$, $ABCACB$, $ABCBAC$ og $ABCBCA$. For hver av disse 5 mulighetene er det 6 muligheter for ekteparene å fordele seg på A , B og C – til sammen $5 \cdot 6 = 30$ muligheter. For hver av disse 30 mulighetene er det 2 muligheter å fordele seg for ekteparet som er plassert på A -setene, og tilsvarende for de to andre ekteparene – til sammen $30 \cdot 2^3 = 240$ muligheter. 240
- (18) **Oppgave 5 2006/2007.** Hvis det er a måter å komme til rute $(i-1, j)$ på, b måter å komme til rute $(i, j-1)$ på og c måter å komme til rute $(i-1, j-1)$ på, så er det $a + b + c$ måter å komme til rute (i, j) på. Til ruter langs nedre og venstre kant er det bare én måte å flytte brikken på. Antall måter vi kan flytte brikken til hver rute er bestemt av disse reglene, som vist i figuren. 63
- | | | | |
|---|---|----|----|
| 1 | 7 | 25 | 63 |
| 1 | 5 | 13 | 25 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
- (18) **Oppgave 8 2006/2007.** La det være x gutter og y jenter i klassen. Antall vennskap mellom gutt og jente er da $2x = 3y$, så x er delelig med 3. Antall vennskap mellom to gutter er $3x/2$ (teller vi tre vennskap mellom gutter for hver gutt, har vi telt alle slike vennskap to ganger). Så x er også delelig med 2, og dermed med 6. Vi har nå mulighetene $(x, y) = (6, 4)$ eller $(x, y) = (12, 8)$ ($x \geq 18$ gir $y \geq 12$, altså minst 30 elever). Men $y \geq 6$, fordi hver jente er venn med 5 andre jenter. Så $(x, y) = (12, 8)$, og $x + y = 20$ 20
- (18) **Oppgave 1 2007/2008.** De to vokalene kan være bokstav nr. 1 og 3, 1 og 4, 1 og 5, 2 og 4, 2 og 5 eller 3 og 5 – til sammen 6 muligheter. For hver av disse 6 mulighetene er det 2 muligheter for rekkefølgen av vokalene – til sammen $6 \cdot 2 = 12$ muligheter. For hver av disse 12 mulighetene er det 3 muligheter for konsonant på første ledige plass og dernest 2 muligheter for konsonant på andre ledige plass – til sammen $12 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ muligheter. Den siste konsonanten tar den siste ledige plassen. 72
- (18) **Oppgave 3 2007/2008.** Ei hjørnerute har bare tre naboer, og må dermed være svart og bare ha svarte naboer. Resten av farge-leggingen av hele rutenettet tvinger seg fram (se figur). Det er $7 \cdot 7 \cdot 4 = 196$ svarte ruter. 196





- (18) **Oppgave 10 2007/2008.** Hvis $k = 36$, kan fordelingen av brikkene (røde–blå–grønne) være Anna 18–18–0, John 9–9–18, Pål 9–9–18, og dermed er det ikke to forskjellige som har 10 røde og 10 blå. Det er også lett å konstruere tilsvarende eksempler for $k < 36$ ved å fjerne tre brikker om gangen – én fra hver spiller og én av hver farge.

Hvis $k \geq 37$, har minst én spiller $k/3 > 12$ eller flere røde, minst én spiller $k/3$ eller flere blå og minst én spiller $k/3$ eller flere grønne. Anta at dette ikke er tre forskjellige spillere, for eksempel at Anna har minst $k/3$ røde og minst $k/3$ blå. Hun har da høyst $k/3$ grønne, og John og Pål minst $2k/3$ grønne til sammen.

La oss si at Pål har minst like mange grønne som John. Pål har da minst $k/3 > 12$ grønne.

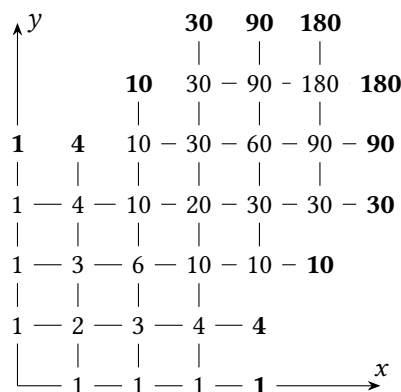
John kan høyst ha $k/2$ grønne (ellers ville han ha hatt flere enn Pål), og dermed minst $k/2 > 18$ røde og blå, altså minst 10 røde eller minst 10 blå – la oss si blå.

Så hvis $k \geq 37$, har en av spillerne minst 13 av en farge, en annen minst 13 av en annen farge, og en tredje minst 10 av en tredje farge. 37

- (19) **Oppgave 4 2008/2009.** Vi gir ridderne nummer fra 1 til 6, der Sir Lancelot selvsagt er nummer 1. Vi skriver den opprinnelige bordplasseringen, regnet fra Sir Lancelot mot høyre, som 123456, der vi altså må huske at den siste (6) er nabo til den første (1). Sir Lancelots nye naboer må altså velges blant 3, 4 og 5. Vi regner opp alle muligheter der den av Sir Lancelots naboer med lavest nummer sitter til høyre, og må derfor huske å gange med to til slutt. Så langt har vi mulighetene 13xxx4, 13xxx5 og 14xxx5, der de tre x-ene representerer de tre andre ridderne. Men vi ser raskt at det bare er ett mulig valg i hvert av de tre tilfellene: 13xxx4 må være 135264, 13xxx5 må være 136425 og 14xxx5 må være 142635. Disse tre mulighetene må vi altså gange med to. 6



- (19) **Oppgave 10 2008/2009.** La (x, y) betegne stillingen x poeng til Kari og y poeng til Mons. Da var forrige stilling $(x-1, y)$ eller $(x, y-1)$. Hvis ingen av disse to stillingene innebærer at en av spillerne har vunnet, er antall måter (x, y) kan oppnås på, summen av antall måter hver av disse to stillingene kan oppnås på. Hvis en av disse to stillingene innebærer at en av spillerne har vunnet, er antall måter (x, y) kan oppnås på lik antall måter den andre av de to stillingene kan oppnås på.



Stillingene $(1, 0)$ og $(0, 1)$ kan bare oppnås på én måte. Ved gjentatt bruk av regelen ovenfor kan vi finne antall måter enhver stilling kan oppnås på. I diagrammet, som kan fylles ut radvis nedenfra og oppover, og fra venstre til høyre i hver rad, er tallet i punktet (x, y) antall måter stillingen (x, y) kan oppnås på. Antallene for sluttstillingene er vist med feit skrift, og summen av disse antallene er 630. 630

- (19) **Oppgave 4 2009/2010.** Tre tall som har sum som er delelig på 3, har enten alle samme rest når de deles på 3, eller de har rest henholdsvis 0, 1 og 2. Fra og med 1 til og med 13 er det 4 tall som har rest 0, 5 tall som har rest 1 og 4 tall som har rest 2. Det er 4 måter å velge tre tall med rest 0, 10 måter å velge tre tall med rest 1, 4 måter å velge tre tall med rest 2, og $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ måter å velge tre tall med forskjellig rest – til sammen 98 måter. 98

- (19) **Oppgave 9 2009/2010.** Anta at det er m jenter og n gutter i klassen. Det er $m(m-1)/2$ måter å velge to jenter på (m muligheter for den ene jenta og $m-1$ for den andre, men da har vi telt hvert par to ganger), og for hver av disse måtene er det $n(n-1)/2$ måter å velge to gutter på. Så $m(m-1)n(n-1)/4 = 3630$, og $(m-1)m \cdot (n-1)n = 4 \cdot 3630 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$. To heltall som følger etter hverandre, kan ikke begge være delelige på 11, så både $(m-1)m$ og $(n-1)n$ er delelige på 11. Hver av disse to produktene må derfor være større enn eller lik $11 \cdot 12$, noe som gjør at det andre er mindre enn eller lik $10 \cdot 11$. Fordi begge skal være delelige på 11, har vi ikke andre muligheter enn likhet i begge tilfellene, så $m + n = 11 + 12 = 23$ 23



- (19) **Oppgave 3 2010/2011.** Gi elevene nummer fra 1 til 10. Det er 9 muligheter for hvem elev nummer 1 skal arbeide sammen med. For hver av disse 9 mulighetene er det 7 muligheter for hvem den gjenværende eleven med lavest nummer skal arbeide sammen med – til sammen $9 \cdot 7$ muligheter. For hver av disse $9 \cdot 7$ mulighetene er det 5 muligheter for hvem den gjenværende eleven som nå har lavest nummer skal arbeide sammen med – til sammen $9 \cdot 7 \cdot 5$ muligheter. På samme måte får vi $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 945$ muligheter når vi også tar hensyn til fjerde par. Det siste paret består av de to gjenværende elevene. Vi kan få alle mulige inndelinger av par ved å følge prosedyren over, og vi har heller ikke telt noen inndeling flere ganger. 945
- (19) **Oppgave 6 2010/2011.** La b være antall blå kuler, r antall røde kuler og g antall gule kuler. Vi finner først antall utvalg av 3 kuler med én kule av hver farge: Det er b muligheter for den blå kula. For hver av disse, er det r muligheter for den røde, til sammen br mulige utvalg, og for hver av disse igjen g muligheter for den gule – til sammen brg utvalg. Hvis vi også tar hensyn til at det er 6 mulige rekkefølger kulene av hver farge trekkes i, får vi $6brg$ like sannsynlige utvalg der alle kulene har forskjellig farge. Totalt fins det, ved et tilsvarende resonnement, $10 \cdot 9 \cdot 8$ like sannsynlige utvalg av tre kuler. Sannsynligheten for å trekke tre kuler som alle har forskjellig farge, er $3/10 = 6brg/(10 \cdot 9 \cdot 8)$, som gir $brg = 36$. Vi må finne tre positive heltall med sum 10 og produkt $36 = 2^2 3^2$, og ved å prøve seg fram med de mulige tallene – 1, 2, 3, 4, 6 – finner man at eneste mulighet er 3, 3, 4. Siden det er flest gule kuler, er det 4 av dem. 4
- (19) **Oppgave 8 2010/2011.** $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ og $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$ for alle heltall n , så alle oddetall og alle tall delelig med 4 kan skrives som differansen mellom to kvadrattall. På den andre siden er differansen mellom kvadratene av et oddetall og et partall odde, mens differansen mellom kvadratene av to partall, $(2k)^2 - (2l)^2 = 4(k^2 - l^2)$, eller mellom kvadratene av to oddetall, $(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4(k^2 - l^2 + k - l)$, delelig med 4, så det fins ikke andre slike tall. Det er 500 positive oddetall mindre enn 1000 og 249 positive tall delelig med 4 som er mindre enn 1000 – til sammen 749. 749
- (20) **Oppgave 10 2010/2011.** Hvis Arne og Berit henholdsvis har (a, b) poeng, er poengsummene etter neste parti $(a+b, b)$, $(a, a+b)$ eller (a, b) . I alle tilfellene bevares største felles divisor av poengsummene, som er 1, siden de startet på stillingen (1, 1). Når vinneren har 10 poeng, har derfor taperen 1, 3, 7 eller 9 poeng. Alle disse er mulige poengsummer for taperen – 1 hvis ni partier på rad tapes, 3 hvis taperen først vinner to partier og så taper tre, 7 hvis taperen først taper to, så vinner to, så taper ett, og 9 hvis taperen vinner åtte partier og så taper ett. 20

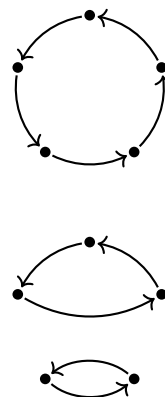


- (20) **Oppgave 1 2011/2012.** Kari kan velge en delmengde av alle bamsene på $2^{10} = 1024$ forskjellige måter. Hun har valgt bort muligheten å ta med ingen bamser (1 måte), én bamse (10 måter) eller nøyaktig to bamser ($\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45$ måter). Da gjenstår $1024 - 1 - 10 - 45$ muligheter. 968
- (20) **Oppgave 7 2011/2012.** La hver av vennene holde gaven de gir bort i høyre hånd, og ta tak i gaven de mottar i venstre hånd, mens ingen slipper taket. Da blir enten alle fem stående i en sirkel, eller de blir stående i to sirkler, med tre venner i den ene sirkelen og to i den andre. Alle fem i en sirkel kan forekomme på $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter. Den andre muligheten kan telles slik: Det er $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ måter å velge ut de to som danner en sirkel alene. For hver av disse finnes det to måter å ordne de andre tre i en sirkel, tilsammen $10 \cdot 2 = 20$ muligheter. 44
- (20) **Oppgave 2 2012/2013.** Et rektangel spesifiseres ved å velge to av sju horisontale linjer og to av sju vertikale linjer. Hvert valg kan gjøres på $7 \cdot 6/2 = 21$ måter, som gir i alt $21^2 = 441$ rektangler. 441
- (20) **Oppgave 4 2012/2013.** I første omgang ser vi ikke forskjell på oddetallene, og skriver 1 for hvert oddetall. Likedan skriver vi 2 for hvert partall. Vi kan ikke ha to oddetall først eller sist, og vi kan heller ikke ha alle tre ved siden av hverandre, men ellers er «alt lov». Så forbudte konfigurasjoner er 111222, 112122, 112212 og 112221, samt speilbildene av disse, pluss 211122 og 221112, i alt 10 forbudte konfigurasjoner. For hver av disse kan de tre oddetallene plasseres på $3! = 6$ måter, og likedan med partallene, i alt $6 \times 6 = 36$ måter. Det er altså $10 \cdot 36 = 360$ forbudte permutasjoner. Antall tillatte permutasjoner blir $6! - 360 = 720 - 360 = 360$ 360
- (20) **Oppgave 1 2013/2014.** En mulighet er at begge de to trekkene går to rader frem eller tilbake, og en kolonne til siden. Det gir $-4, 0$ eller 4 rader frem, og $-2, 0$ eller 2 kolonner mot høyre – i alt $3 \cdot 3 = 9$ mulige felt. En annen mulighet er tilsvarende, men med rader og kolonner byttet om. Det gir 9 nye mulige felt, med ett felt felles med den første muligheten, nemlig feltet som brikken startet på. Vi har nå 17 mulige felt. Den gjenværende muligheten er at det ene trekket går to rader frem eller tilbake, mens det andre går to kolonner til siden. Dette gir $-3, -1, 1$ eller 3 rader frem, og tilsvarende for kolonnene. I alt altså $4 \cdot 4 = 16$ mulige felt, som ingen av dem overlapper med de 17 vi hadde fra før. I alt gir det $17 + 16 = 33$ mulige felt. 33



- (20) **Oppgave 2 2013/2014.** Primtallsfaktoriseringen av 500 er $2^2 \cdot 5^3$. Tallet a må gå opp i 500, så vi kan skrive $a = 2^{a_2} \cdot 5^{a_5}$ med $0 \leq a_2 \leq 2$ og $0 \leq a_5 \leq 3$. Vi skriver $b = 2^{b_2} \cdot 5^{b_5}$ og $c = 2^{c_2} \cdot 5^{c_5}$ tilsvarende, slik at $a_2 + b_2 + c_2 = 2$ og $a_5 + b_5 + c_5 = 3$. $a_2 = 0$ gir tre mulige valg for b_2 , $a_2 = 1$ gir to mulige valg for b_2 , og $a_2 = 2$ gir ett mulig valg for b_2 . Til sammen kan (a_2, b_2) velges på $3 + 2 + 1 = 6$ måter, og c_2 er da bestemt. På tilsvarende vis kan (a_5, b_5) velges på $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ måter, og c_5 er da bestemt. Dermed har vi i alt $6 \cdot 10 = 60$ mulige valg for (a, b, c) 60

- (21) **Oppgave 5 2013/2014.** I stedet for å legge klinkekulene i esker, kan vi legge dem på et papirark og tegne piler mellom klinkekulene. Hvis en blå klinkekule skal i en gul eske, tegner vi en pil fra den blå til den gule klinkekulen. På den måten får vi et diagram av piler mellom klinkekulene, der hver klinkekule befinner seg i halen av én pil og ved spissen av en annen. Pilene må danne lukkede sykler av lengde 2, 3 eller 5 – se figuren. (Vi kan ikke ha en sykel av lengde 4, for da kan ikke den femte klinkekulen være med i noen sykel.) Det er $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ mulige måter å ordne klinkekulene i en sykel med fem kuler: Fire mulige valg for klinkekulen etter den blå, deretter tre for den neste, to for den etter det igjen, og for den fjerde og femte er det bare ett valg. Men vi kan også ordne de fem klinkekulene i en sykel på tre og en på to kuler. Det er $5 \cdot 4/2 = 10$ måter å velge ut hvilke to kuler skal tilhøre den minste sykelen, og for hvert valg finnes det to måter å ordne de tre andre i en sykel. I alt har vi $24 + 10 \cdot 2 = 44$ måter å gjøre det på. 44



- (21) **Oppgave 1 2014/2015.** Vi får seks-sifrede tall av ønsket type ved å stryke tre sifre fra 123456789. Dette kan gjøres på $\binom{9}{3} = 9 \cdot 8 \cdot 7/3! = 84$ måter. 84

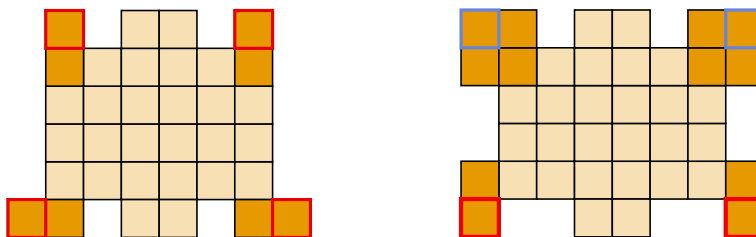
- (21) **Oppgave 5 2014/2015.** De hvite tårnene må begrense seg til tre rader. For hvis fire rader inneholder hvite tårn, er det bare to rader til disposisjon for de svarte tårnene, og en av de to radene må ha minst fem svarte tårn, som tvinger alle de hvite tårnene inn på én linje, og det er det ikke plass til. På samme måte må alle de hvite tårnene finnes innenfor tre linjer. Tre rader og tre linjer gir eksakt ni plasser, som da alle må ha et hvitt tårn, og så må de svarte tårnene plasseres de gjenværende radene og linjene. Plasseringen av brikkene er altså fullstendig bestemt av de radene og linjene som skal inneholde hvite tårn. De tre radene som har hvite tårn kan velges på $\binom{6}{3} = 6 \cdot 5 \cdot 4/3! = 20$ måter, og de tre linjene som har hvite tårn kan likeledes velges på 20 måter. I alt gir det $20 \cdot 20 = 400$ måter å plassere tårnene på. 400



- (21) **Oppgave 6 2014/2015.** Dersom $A_i = \{a_i, \dots, b_i\}$, så er $A_{i+1} = \{2a_i, \dots, 2b_i\}$, slik at $a_{i+1} = 2a_i$ og $b_{i+1} = 2b_i$. Vi kan nemlig liste opp tallene i A_{i+1} slik: $a_i + a_i$, $(a_i + 1) + a_i, \dots, b_i + a_i$, $b_i + (a_i + 1), \dots, b_i + b_i$. Nå er det klart at $a_i = 2^i$ og $b_i = 4 \cdot 2^i$, så A_8 inneholder $b_8 - a_8 + 1 = 4 \cdot 2^8 - 2^8 + 1 = 3 \cdot 256 + 1 = 769$ forskjellige tall. 769

- (21) **Oppgave 8 2015/2016.** Loppen har to valgmuligheter for hvert av åtte hopp, så det er i alt $2^8 = 256$ mulige ulike økter. Den totale lengden av de første $k-1$ hoppene er $2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 2$, mens lengden av det k -te hoppet er 2^k . Så hvis det k -te hoppet går til høyre, er posisjonen etterpå ≥ 2 , men hvis det går til venstre, er posisjonen etterpå ≤ -2 . Spesielt er posisjonen etter k hopp forskjellig i to økter der det k -te hoppet går i hver sin retning. Denne situasjonen vedvarer dersom etterfølgende hopp går samme vei, og det følger at forskjellige økter gir forskjellige sluttposisjoner. Antall forskjellige sluttposisjoner er derfor lik antall forskjellige økter. 256

- (22) **Oppgave 10 2015/2016.** I begge figurene er det noen felt, markert med rødt omriss, som bare har ett nabofelt hver. Dominobrikken som dekker et slikt felt, må da også dekke nabofeltet. I den venstre figuren må altså fire brikker plasseres som antydnet. I den høyre figuren må to brikker plasseres som vist nederst. Men det er to mulige plasseringer, horisontalt eller vertikalt, for den dominobrikken som skal dekke hjørnefeltet øverst til venstre (med blått omriss). Da må en annen brikke legges slik at de to tilsammen dekker det fargelagte 2×2 -kvadratet. Tilsvarende gjelder øvre høyre hjørne. Den grå delen er lik i de to figurene. I den venstre figuren er det ikke andre valgmuligheter enn i den grå delen, så M er antall måter å dekke denne på. I den høyre figuren har vi $2 \cdot 2 = 4$ måter å dekke de fargete feltene på og M måter å dekke de grå på, så $N = 4M$.



..... 4

- (22) **Oppgave 3 2016/2017.** De tre hjørnene kan velges blant de tolv gitte punktene på i alt $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ måter. Fire av disse valgene består av tre punkt på samme side av kvadratet, men da blir ikke disse hjørnene til noen trekant, så det er bare $220 - 4 = 216$ muligheter.



Alternativt kan vi telle opp to typer trekkanter: De med to hjørner på én av kvadratets sider er det $4 \cdot 3 \cdot (3 + 3 + 3) = 108$ av, og de med alle tre hjørner på hver sin side er det $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ av. (Vi står over detaljene.) 216

- (22) **Oppgave 7 2016/2017.** La oss anta at øynene på terningene er svarte. Nå maler vi i tillegg røde øyne på hver terningside, slik at det til sammen er $n + 1$ svarte og røde øyne på hver side av en terning med n sider. Men da vil sidene på en slik terning ha 1, 2, ..., n røde øyne, så enten vi teller svarte eller røde øyne, er sannsynlighetsfordelingen helt lik.

Dersom S er antall svarte øyne og R er antall røde øyne ved et gitt kast, er alltid $S + R = 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 13 + 4 \cdot 21 = 134$. Fordi fordelingene er like, er det like sannsynlig at $S < k$ som at $R < k$, som igjen er det samme som at $S > 134 - k$. Men vi har også fått vite at $S < k$ er like sannsynlig som $S > k$, så vi må ha $134 - k = k$, og derfor $k = 67$. (Dette argumentet krever at $S = 67$ er et mulig utfall, men det er det heldigvis.) 67

- (22) **Oppgave 5 2017/2018.** Hvis en av sidekantene i rektangelet er $2k$ ruter lang, vil hver rad eller kolonne i rektangelet ha k ruter av hver farge, så i alt blir det like mange svarte som hvite ruter. Men hvis hver sidekant er et odde antall ruter lang, inneholder rektangelet et odde antall ruter i alt, så det kan ikke være like mange hvite som svarte ruter. Det er 8 måter å velge én kolonne på i sjakkbrettet, 6 måter å velge tre nabokolonner, 4 måter å velge fem nabokolonner, og 2 måter å velge sju nabokolonner på. I alt $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ mulige valg av et odde antall nabokolonner. Tilsvarende er det 20 mulige valg av et odde antall naborader, og derfor i alt $20 \cdot 20 = 400$ rektangler med sidekanter av odde lengde. 400

- (22) **Oppgave 6 2017/2018.** Bytt først ut oddetallssifrene med 1, og partallssifrene med 0. Vi finner disse seks mulighetene: 0011011, 0110011, 0110110, 1100011, 1100110, 1101100. For hver av disse, plasserer vi inn oddetallssifrene i stedet for enerne på en av $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ måter, og partallssifrene i stedet for nullene på en av $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ måter. Det gir i alt $6 \cdot 24 \cdot 6 = 864$ muligheter. 864

- (23) **Oppgave 10 2017/2018.** Kall en binærstreng *god* dersom den har høyst to nuller på rad. Skriv S_n for antall gode binærstrenger av lengde n ; så er $S_1 = 2$, $S_2 = 4$ og $S_3 = 7$. En god binærstreng av lengde $n \geq 3$ må ende på 1, 10 eller 100, og foran denne endelsen er en god binærstreng av lengde henholdsvis $n - 1$, $n - 2$ og $n - 3$. Dermed er $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$, og så blir følgen $S_1, S_2, \dots, S_{11}$ slik: 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927. 927



- (23) **Oppgave 1 2018/2019.** Skriv a_n for antall måter å hoppe opp n trinn på. Så er $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$: Med to trinn kan Kalle ta begge trinnene i ett, eller ett om gangen. Når $n > 2$ er $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: For Kalle kan hoppe ett trinn først, og har da a_{n-1} muligheter for resten av trappen, eller han kan hoppe to trinn, med a_{n-2} muligheter videre. De første 12 tallene i følgen $a_1, a_2, \dots$ blir dermed 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. (Disse tallene er *Fibonaccitall*: Men følgen av Fibonaccitall starter med 1, 1, 2, 3, 5,)

Alternativ løsning: Svaret kan skrives som en sum av binomialkoeffisienter:

$$\binom{12}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1.$$

Forklaring: Leddene i summen er antall muligheter med 0, 1, 2, ..., 6 totrinns-hopp. Om Kalle for eksempel gjør 3 totrinns-hopp, blir det 9 hopp til sammen, og de tre totrinns-hoppene kan velges på en av $\binom{9}{3}$ måter, avhengig av hvilke tre av de ni hoppene som er to trinn opp. 233

- (23) **Oppgave 4 2018/2019.** Tverrsummen av tallet må være et multiplum av 9. Tverrsummen av det opprinnelige tallet er $10 \cdot (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 450$, som er et multiplum av 9, og derfor må også summen av de to sifrene Nils visker ut, være et multiplum av 9. Eneste muligheter er 18 (han visker ut to niere) og 9 (han visker ut to siffer med sum lik 9). Den første muligheten kan han få til på $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$ måter. For to gitte siffer med sum 9, er de to sifrene forskjellige, så hvert av dem kan velges fritt på en av ti måter, i alt 100 muligheter. De to sifrene kan selv velges på fire måter (8 + 1, 7 + 2, 6 + 3 og 5 + 4), så her har vi i alt 400 muligheter, i tillegg til de 45 vi fant først. 445

- (23) **Oppgave 3 2019/2020.** Vi illustrerer problemet med et mye mindre eksempel. De hvite småtrekantene i figuren kan telles opp ved å summere radvis, med resultat $1 + 2 + 3 = 6$. Om den store trekanten hadde sidekant n , ville den siste raden fått $n - 1$ hvite småtrekanter, og det totale antallet ville blitt $1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n - 1) \cdot n / 2$. Med $n = 40$ blir det $1 + 2 + 3 + \dots + 39 = 39 \cdot 40 / 2 = 780$ hvite småtrekanter.



..... 780



- (23) **Oppgave 5 2019/2020.** I hver runde vil enten Sigrid eller Petra (eller begge) få poeng. For hvis Petra *ikke* får poeng, er det fordi begge terningene viser oddetall, men da er summen er partall, så Sigrid får poeng. De får *begge* poeng akkurat de gangene Odd *ikke* får poeng. Dermed er det alltid to som får poeng i hver runde, og summen av alles poengsummer er $2 \cdot 300 = 600$. Men da har Odd fått $600 - 147 - 226 = 227$ poeng. 227

- (23) **Oppgave 7 2019/2020.** Skriv A for delmengden av $\{10000, 10001, \dots, 99999\}$ som består av tall med desimalrepresentasjon på formen $777\square\square$, der hver boks står for et vilkårlig tallsiffer. Skriv B for de på formen $\square 777\square$, og C for de på formen $\square\square 777$.

Skriv så $|A|$ for antall medlemmer i A , og så videre. Da er $|A| = 100$ og $|B| = |C| = 90$ (siden første siffer ikke får være null). Vi summerer, og får $|A| + |B| + |C| = 280$.

Men da har vi talt opp tallene i snittet $A \cap B$ to ganger. Disse er tallene på form $7777\square$, så $|A \cap B| = 10$. Dette antallet må trekkes fra summen vi fant. Vi må gjøre det samme med $B \cap C$ (tall på formen $\square 7777$, $|B \cap C| = 9$) og $A \cap C$ (bare tallet 77777 , $|A \cap C| = 1$), så til sammen trekker vi fra 20.

Til slutt legger vi merke til at tallet 77777 er først tatt med tre ganger og så trukket fra tre ganger, så det er ikke talt med. Derfor må vi legge til 1 til sist, med endelig resultat 261.

Formelen $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$ er kjent som *inklusions-ekklusjons-prinsippet*. En tilsvarende formel gjelder for et vilkårlig (endelig) antall mengder. Metoden kan virke omstendelig, men den er enkel og rask å bruke når man først er godt kjent med den.

Alternativt kan vi dele opp i disjunkte mengder, for eksempel slik: Tall på formen $777xy$ der x og y er vilkårlige tallsiffer (100 mulige), tall på formen $x777y$ med $x \neq 0$, $x \neq 7$ og y vilkårlig (80 mulige), og på formen $xy777$ med $x \neq 0$ og $y \neq 7$ (81 mulige), til sammen 261 mulige. 261

- (24) **Oppgave 1 2020/2021.** Rekkefølgen på de fire oppgavene kan velges på en av $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter. Først fire muligheter for den første, tre for den andre, to for den tredje, og så er den siste bestemt. Med én av de 24 mulighetene vinner Andrea, men i hver av de 23 andre vinner Beate. Så Beate har 23 ganger større sjanse for å vinne, og må derfor spandere så mange iser på Andrea dersom Andrea vinner. 23



- (24) **Oppgave 6 2020/2021.** Vi kan begynne med å fargelegge diagonalen a4–b3–c2–d1. Det kan gjøres på $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ måter: Vi har tre valg for fargen på rute a4, deretter to valg for b3, så to for c2, og to for d1.

4				
3				
2				
1				
	a	b	c	d

Deretter fargelegger vi a2 og b1. Vi har to valg for a2. Vi kan velge samme farge som for c2: Da har vi to valg for b1. Eller vi kan velge fargen som er forskjellig fra både b3 og c2: Da har vi bare ett valg for b1. Det gir til sammen tre mulige fargevalg for a2–b1. På samme måte har vi tre mulige valg for c4–d3. Det er tilsammen $3 \cdot 3 = 9$ mulige valg for de fire rutene a2, b1, c4, d3. Dermed kan mini-sjakkbrettet fargelegges på $24 \cdot 9 = 216$ måter. 216

- (24) **Oppgave 10 2020/2021.** Den gitte ulikheten kan skrives som

$$(2^{n_2} - 2) + (3^{n_3} - 3) + (4^{n_4} - 4) + \dots + (2020^{n_{2020}} - 2020) \leq 48.$$

Fordi $8^2 - 8 > 48$, må $n_k = 1$ og $k^{n_k} - k = 0$ for alle $k > 7$.

Vi kan altså helt se bort fra $n_8, n_9, \dots, n_{2020}$. Summen av disse tallene (2013) er gitt, så vi trenger bare telle opp antall verdier av summen $s = n_2 + \dots + n_7$ med $(2^{n_2} - 2) + \dots + (7^{n_7} - 7) \leq 48$.

Her er en tabell som viser $k^n - k$ for alle (k, n) med $2 \leq k \leq 7$ og $k^n - k \leq 48$:

n	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	12	20	30	42
3	6	24				
4	14					
5	30					

Vi får velge ett (svart) tall fra hver kolonne i tabellen, slik at summen av disse høyst er 48, og ser på summen s av radnumrene n . Fordi $30 + 6 + 12 + 0 + 0 + 0 = 48$ er det mulig å oppnå $s = 5 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 12$. Det er forholdsvis lett å se av tabellen at s ikke kan bli større. Minste mulige verdi er $s = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$. Man kan enkelt produsere alle summer mellom 12 og 6 ved å velge $1 \leq n_1 \leq 5$, $1 \leq n_2 \leq 2$, $1 \leq n_3 \leq 2$, og $n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 1$. Vi har funnet i alt sju mulige verdier for s 7

- (24) **Oppgave 2 2021/2022.** Om vi skriver m og n for tallet som dannes av henholdsvis de to første og de to siste sifrene, har Nils 100 valg med $n = m$, nemlig $m = 00, 01, \dots, 99$. Han har 99 valg med $n = m + 1$ ($m = 99$ går ikke), 98 valg med $n = m + 2$, og 97 valg med $n = m - 3$. Tilsvarende gjelder for $m = n + 1$, $m = n + 2$ og $m = n + 3$, så svaret blir $100 + 2(99 + 98 + 97)$ 688



- (24) **Oppgave 5 2021/2022.** Om vi ser bort fra Cecilies ark, får vi bare $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ mulige valg for plasseringen av Anne og Berits ark. (Fullstendig oppregning: AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA.) Når så Cecilie skal plassere sine to ark til slutt, spiller det ingen rolle hvilke av arkene på bordet som tilhører hvem. Vi kan bare markere dem med bokstaven X, slik at mulighetene blir CCXXXX, CXCXXX, og så videre. Hun kan plassere sine to ark blant seks posisjoner på $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$ måter. I alt er det $6 \cdot 15 = 90$ forskjellige rekkefølger. 90

- (25) **Oppgave 8 2021/2022.** Vi kan spesifisere en lagkombinasjon ved å velge ut alle de som lag B sender, sammen med de som lag A *ikke* sender. Dette er tilsammen 5 personer av 12, og de kan velges på i alt $\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$ måter. Men en av disse kombinasjonene er ikke tillatt, nemlig når alle 5 er tilhører lag A. Det vil jo si at ingen av lagene sender noen. Så vi må trekke fra 1, og får 791 som svar

Alternativ løsning, mer rett frem men litt mer regning: Men kan velge k personer fra lag A på $\binom{5}{k}$ måter, og k personer fra lag B på $\binom{7}{k}$ måter. Vi summerer og får $\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{5}{2}\binom{7}{2} + \binom{5}{3}\binom{7}{3} + \binom{5}{4}\binom{7}{4} + \binom{5}{5}\binom{7}{5} = 5 \cdot 7 + 10 \cdot 21 + 10 \cdot 35 + 5 \cdot 35 + 1 \cdot 21$. Tallene hentes ut av Pascals trekant. 791

- (25) **Oppgave 3 2022/2023.** Ta sifrene 123456789 og stryk et vilkårlig utvalg av dem (kan hende ingen, men ikke alle). Det kan gjøres på $2^9 - 1 = 511$ måter, der vi trakk fra 1 fordi vi ikke kan stryke alle sifrene. 511

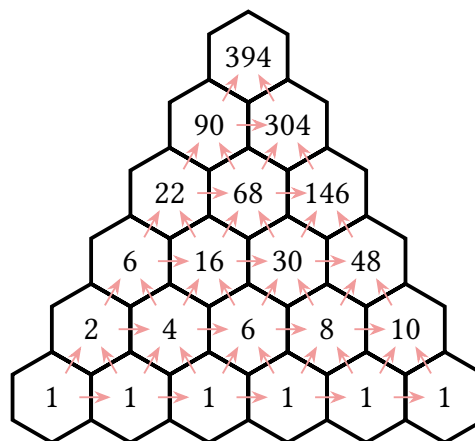


- (25) **Oppgave 6 2022/2023.** Hvert kort må få enten to oddetall eller to partall. Med andre ord må Nils dele opp oddetallene i par, og det samme med partallene.

Skriv p_n for antall måter å dele en mengde med $2n$ elementer i n par. Så er $p_1 = 1$. Dersom $n \geq 2$, velger du først ett element å lage et par av. (Det spiller ingen rolle hvilket, og du skal ikke telle med antall valgmuligheter for dette, for alle elementer skal jo med i et par, og vi bryr oss ikke om hvordan parene ordnes.) Du har $2n - 1$ valg for det andre elementet. Deretter kan du dele de øvrige $2n - 2$ elementene i par på p_{n-1} måter. Det følger at $p_n = (2n - 1)p_{n-1}$. Spesielt er $p_3 = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$. Altså har Nils 15 muligheter for kortene med oddetall, og like mange for de med partall, i alt $15^2 = 225$ muligheter.

Alternativ løsning: Vi ser bare på oddetallskortene. Nils kan gå frem som følger: Han skriver oddetallene i vilkårlig rekkefølge, for eksempel 3, 7, 1, 9, 11, 5, og så slår han sammen to og to par: (3, 7), (1, 9), (11, 5) og skriver tallene i hvert par på hver sin side av et kort. Han kan gjøre dette på $6!$ måter. Men hvert par kan ordnes på to måter, med samme sluttresultat, så vi må dele på $2^3 = 8$. I tillegg kan de tre tallparene ordnes på $3! = 6$ måter, og alle de gir også samme resultat. Så oddetallskortene gir $\frac{6!}{6 \cdot 8} = 15$ muligheter. Partallskortene håndteres på samme måte, og løsningen avsluttes på samme måte som ovenfor. 225

- (25) **Oppgave 8 2022/2023.** Start nederst til venstre, og marker hver celle med antall måter du kan komme til cellen på fra A. I figuren er tallet i hver celle unntatt celle A lik summen av tallene i cellen til venstre og de to naboene i raden under. 394



- (25) **Oppgave 3 2023/2024.** Hvis Per stjal ett egg x dager, to egg y dager og tre egg z dager, er $x + y + z = 365$ og $x + 2y + 3z = 700$. I tillegg skal x , y og z være heltall ≥ 0 . Trekker vi de to ligningene fra hverandre, får vi $y + 2z = 335$. Med $z = 0$ får vi $y = 335$. Det går an, for det gir $x = 30 \geq 0$, og det gir åpenbart den største mulige verdi for y . Ligningen $y + 2z = 335$ impliserer at y er odde. Minste mulige verdi later til å være $y = 1$. Det gir $z = 167$ og $x = 365 - 167 - 1 \geq 0$, så det er også mulig. 334

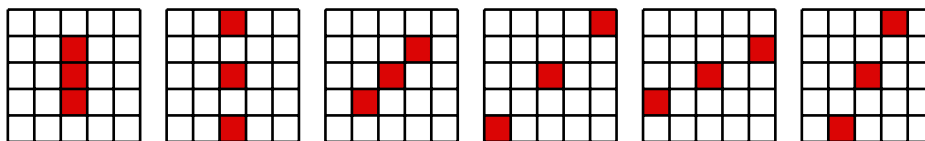


- (26) **Oppgave 6 2023/2024.** Nils må velge hvilke fem tall skal skrives på den røde siden av hvert kort. Det kan han gjøre på $\frac{10!}{5!5!} = 252$ måter. Da har han bare to valg for hva han skal gjøre med resten av tallene: De må skrives på den blå siden av hvert kort enten i samme rekkefølge som tallene på den røde siden, eller i omvendt rekkefølge. I alt $2 \cdot 252$ muligheter. 504
- (26) **Oppgave 8 2023/2024.** Gjennomsnittet er 500 før Nina har endret tallene. (En rask måte å se det på: Gjennomsnittet av 1 og 999 er 500, det gjelder også 2 og 998, og så videre opp til 499 og 501, og så er bare 500 igjen.) Vi må finne ut hvor mye gjennomsnittet avtar. Men det er enklere å finne ut hvor mye *summen* avtar, og så dele på 999 til slutt. Når Nina endrer det første sifferet i hvert av de 100 tallene 900, 901, ..., 999 til 6, avtar verdien med 300 for hvert av dem, og summen med $100 \cdot 300 = 30000$. På samme måte, når hun endrer sifferet i tierposisjonen for hvert av de 100 tallene 90, 91, ..., 99, 190, 191, ..., 199, ..., 990, 991, ..., 999, avtar summen med $100 \cdot 30 = 3000$. Og når hun endrer sifferet i enerposisjonen for hvert av tallene 9, 19, ..., 999, avtar summen med $100 \cdot 3 = 300$. I alt avtar summen med 33300, så gjennomsnittet avtar med $\frac{33300}{999} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ og ender opp med verdien $466\frac{2}{3}$ 467
- (26) **Oppgave 1 2024/2025.** Hvis det ikke var for kravet om minst én bokstav og ett tallsiffer, var svaret enkelt nok: Det er $16^8 = (2^4)^8 = 2^{32}$ muligheter. Vi må trekke fra de $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ passordene som består av bare bokstaver og like mange som består av bare tallsiffer. Tilsammen er det $2^{32} - 2 \cdot 2^{24} = 2^{32} - 2^{25} = 2^{25}(2^7 - 1) = 2^{25} \cdot 127$ muligheter. 127
- (26) **Oppgave 2 2024/2025.** Én av klassene får to lærere, mens resten får én lærer hver. Vi kan telle opp slik: Først velger vi hvilken klasse skal ha to lærere (fire muligheter). Så velger vi hvilke to lærere den klassen skal ha ($\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ muligheter). Så fordeler vi de tre øvrige lærerne på de tre øvrige klassene ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ muligheter). I alt er det $4 \cdot 10 \cdot 6 = 240$ muligheter. 240



- (26) **Oppgave 9 2024/2025.** Siden vi må telle på to forskjellige måter, trenger vi litt terminologi for unngå forvirring. La oss kort og godt kalle et utvalg på tre av de 25 rutene i rutenettet et *trippel*. Vi regner to tripler som forskjellige selv om det ene er resultat av å rotere det andre. Det er i alt $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 25 \cdot 4 \cdot 23$ tripler. Men det oppgaven spør etter, kan vi kalle *mønstre*: Ethvert trippel gir et mønster, men om vi roterer et mønster, regner vi resultatet som det samme mønsteret.

Når vi roterer brettet med et trippel 90° , 180° , 270° eller 0° , får vi altså bare ett mønster, men normalt fire tripler. Unntaket er symmetriske tripler: De må inneholdet midtruten, pluss ett par av ruter der den ene kommer fra den andre ved å rotere brettet 180° . (Ingen tripler er symmetrisk med hensyn på en 90° rotasjon, for det krever fire fargelagte ruter.) Det er i alt $\frac{24}{2} = 12$ symmetriske par, altså 12 symmetriske tripler, som gir opphav til $\frac{12}{2} = 6$ mønstre. Her er de: Merk at de to siste er forskjellige mønstre, for det ene kan ikke roteres til det andre. De er i stedet speilbilder av hverandre.



Alle de øvrige $4 \cdot 25 \cdot 23 - 12$ triplene gir så $\frac{25 \cdot 4 \cdot 23 - 12}{4} = 25 \cdot 23 - 3 = 572$ mønstre. I alt har vi da $572 + 6 = 578$ mønstre. 578



Tallteori

- (27) **Oppgave 3 2005/2006.** Faktorisering gir $x^2 - 20x + 75 = (x - 5)(x - 15)$, som er positivt hvis og bare hvis $x \leq 4$ eller $x \geq 16$. Hvis $x \leq 3$ eller $x \geq 17$, blir uttrykket et sammensatt heltall, mens $x = 4$ og $x = 16$ begge gir primtallet 11. 20
- (27) **Oppgave 7 2005/2006.** Summen i oppgaven er lik antall par (x, b) av hele tall som er slik at $100 + b$ er delelig med x og $1 \leq b \leq x \leq 100$. (Hvis $b \leq 100 < x < 100 + b$, er ikke $100 + b$ delelig med x .) Men for hver x er nøyaktig ett av de x tallene $101, 102, \dots, 100 + x$ delelig med x . Altså fins det for hver av de 100 mulighetene for x nøyaktig ett tall $b \leq x$ slik at $100 + b$ er delelig med x , og antallet er 100. 100
- (27) **Oppgave 1 2006/2007.** Fordi 3, 5, 7 og 8 ikke har noen felles primfaktorer, må tallet minst være $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$. På den andre siden er dette tallet delelig også med 1, 2, 4 og 6. 840
- (27) **Oppgave 10 2006/2007.** La x være antall gullmynter. Da er $x + 1$ delelig både med 30 og 31, og fordi 30 og 31 ikke har noen felles faktor, er $x + 1$ delelig med $30 \cdot 31 = 930$. La $k = (x + 1)/930$. Da er $x = 930k - 1 = 29 \cdot 32k + 2k - 1$, og da x er delelig med 29, er $2k - 1$ delelig med 29. Minste mulige k er $k = 15$, som gir $x = 29(32 \cdot 15 + 1) = 29 \cdot 481 < 20\,000$, og 481 gullmynter på hver. Neste mulighet er $k = 44$, men $k \geq 44$ gir $x \geq 29(32 \cdot 44 + 3) > 20\,000$ 481
- (27) **Oppgave 2 2007/2008.** La x være antall ganger som knappen for 11 etasjer opp må trykkes og y antall ganger som knappen for 8 etasjer ned må trykkes. Da er $1 + 11x - 8y = 3$, altså $11x - 8y = 2$. Hvis x er et oddetall, så er venstresida et oddetall og høyresida et partall – altså må x være et partall. $x = 2$ eller 4 gir ikke noen heltallige muligheter for y , men $x = 6$, $y = 8$ er en løsning. Større verdier av x gir også større verdier for y , så $6 + 8 = 14$ er minste antall trykk. 14
- (27) **Oppgave 4 2007/2008.** Fordi n er delelig på 2 og 3, er 2 og 3 primfaktorer i n . Multiplisiteten til 2 som primfaktor i n må være odde, fordi $n/2$ er et kvadrattall, og delelig med 3, fordi $n/3$ er et kubikktall. Minste mulige multiplisitet er 3. Multiplisiteten til 3 som primfaktor i n må være jamn, fordi $n/2$ er et kvadrattall, og multiplisiteten minus én må være delelig med 3, fordi $n/3$ er et kubikktall. Minste mulige multiplisitet er 4. Minste mulighet for n er dermed $2^3 \cdot 3^4 = 648$, som tilfredsstiller kravene i oppgaven. 648



- (28) **Oppgave 6 2007/2008.** Fire ganger tverrsummen av et k -sifret tall er høyst $4 \cdot k \cdot 9 = 36k$, mens et k -sifret tall minst er lik 10^{k-1} . Skal fire ganger tverrsummen være lik tallet, må $10^{k-1} \leq 36k$, noe som bare er mulig for $1 \leq k \leq 3$. La sifrene i tallet være a , b og c , slik at tallet er lik $100a + 10b + c$. Vi ønsker $100a + 10b + c = 4(a + b + c)$, som gir $32a + 2b = c$, der a , b og c altså er heltall fra og med 0 til og med 9 (ikke alle lik 0). Det fins ingen løsninger med $a > 0$, så $a = 0$ og $2b = c$. Dette gir fire tall som er lik fire ganger sin tverrsum – 12, 24, 36 og 48. 4
- (28) **Oppgave 2 2008/2009.** La det være N egg i kurven. $N - 1$ er delelig med 2, 3, 4, 5 og 6, og dermed også med minste felles multiplum av disse, som er 60. Altså er $N - 1 = 60k$ for et heltall $k \geq 0$. N er delelig med 7, og derfor er også $N - 7 \cdot 8k = 4k + 1$ delelig med 7. For $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ får vi $4k + 1 = 1, 5, 9, 13, 17, 21$. Bare det siste av disse tallene er delelig med 7, så minste mulighet er $k = 5$. Det gir $N = 60 \cdot 5 + 1 = 301$ 301
- (28) **Oppgave 8 2008/2009.** Anta at $2009 + n^2 = N^2$, der N er et positivt heltall. Da er $7^2 \cdot 41 = 2009 = (N - n)(N + n)$. Fordi $N - n < N + n$, gir det mulighetene 1, 7 eller 41 for $N - n$, og dermed henholdsvis 2009, 287 eller 49 for $N + n$. De mulige verdiene av $n = \frac{1}{2}((N - n) + (N + n))$ blir 1004, 140 eller 4, som har sum 1148. Halvparten er 574. 574
- (28) **Oppgave 1 2009/2010.** Alle interessante tall kan skrives som $200a + a = 201a$, der a er et positivt heltall. Så alle interessante tall er delelige på 201. På den andre siden er både $201 \cdot 5$ og $201 \cdot 7$ interessante, og de har største felles divisor lik 201, så det fins ikke noe større tall som alle interessante tall er delelige på. 201
- (28) **Oppgave 5 2009/2010.** Vi faktoreriserer og får $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 = 485$, og 485 kan skrives som et produkt av to positive heltall bare på to måter, $1 \cdot 485$ eller $5 \cdot 97$. Faktoren $a - b$ er mindre enn $a^2 + ab + b^2$, så $a - b = 1$ eller $a - b = 5$, som henholdsvis gir $(b + 1)^2 + (b + 1)b + b^2 = 485$ eller $(b + 5)^2 + (b + 5)b + b^2 = 97$, altså $3b^2 + 3b - 484 = 0$ eller $b^2 + 5b - 24 = 0$. Bare den siste har positiv heltallig løsning, $b = 3$, som gir $a = 8$, og $8^3 + 3^3 = 539$ 539
- (28) **Oppgave 8 2009/2010.** Likningen kan skrives om til $(x + 2)(y + 1)(z + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Det er fire muligheter for heltallige positive (x, y, z) : $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(3, 1, 2)$ eller $(3, 2, 1)$. I alle tilfellene er $x + y + z = 6$ 6
- (28) **Oppgave 2 2010/2011.** Summen av tall som et primtall p er delelig med, er $1 + p$, som ikke er mer enn dobbelt så stort som p . Summen av tallene som



andre tall mindre enn eller lik $12 - 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12$ – er delelig med, er henholdsvis $1, 1 + 2 + 4 = 7, 1 + 2 + 3 + 6 = 12, 1 + 2 + 4 + 8 = 15, 1 + 3 + 9 = 13, 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ og $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Bare 12 har en sum som er mer enn dobbelt så stor som tallet selv, så det er det minste superdelelige tallet. 12

- (28) **Oppgave 3 2011/2012.** La x betegnet tallet. Den andre opplysningen gir $x = 2012n + 100$ for et heltall n , så x er delelig med 4. Den første opplysningen gir $x = 2010m + 1000$ for et heltall m . Siden både x og 1000 er delelige med 4, mens 2010 ikke er det, må m være et partall. Men da er $2010m$ delelig med 12, så svaret blir det samme som resten når 1000 deles med 12. Vi har $1000 = 12 \cdot 83 + 4$ 4

- (29) **Oppgave 5 2011/2012.** $m^3 + m^2 - m - 1 = m^2(m+1) - (m+1) = (m^2 - 1)(m+1) = (m-1)(m+1)^2$ er et kvadrattall nøyaktig når $m-1$ er det, altså $m = 1 + k^2$. Her kan k ta alle verdier fra og med $k = 1$ til og med $k = 99$ 99

- (29) **Oppgave 1 2012/2013.** $899 = 30^2 - 1^2 = (30-1)(30+1) = 29 \cdot 31$, så 31 er den største primfaktoren. 31

- (29) **Oppgave 6 2012/2013.** De heltallige multiplene mindre enn 2013 av et vilkårlig positivt heltall n er $n, 2n, 3n$, og så videre opp til kn , der k er $2012/n$ avrundet ned til nærmeste heltall. Vi skriver $\lfloor 2012/n \rfloor$ for denne størrelsen, som altså er antallet slike multipler.

Det er $\lfloor 2012/2 \rfloor = 1006$ partall mindre enn 2013, $\lfloor 2012/3 \rfloor = 670$ tall som er delelig med 3, og $\lfloor 2012/5 \rfloor = 402$ tall som er delelig med 5. Det skulle bli $1006 + 670 + 402 = 2078$ tall som er delelig med en av de tre faktorene 2, 3 og 5.

Det er åpenbart for mye, og grunnen er at vi har telt tall som er delelig med to av faktorene dobbelt: Det vil si alle tall som er delelig med $2 \times 3 = 6$ ($\lfloor 2012/6 \rfloor = 335$ tall), eller med $2 \times 5 = 10$ ($\lfloor 2012/10 \rfloor = 201$ tall), eller med $3 \times 5 = 15$ ($\lfloor 2012/15 \rfloor = 134$ tall): I alt $335 + 201 + 134 = 670$ tall er telt to ganger, så vi står igjen med $2078 - 670 = 1408$ tall.

Men det er *heller ikke rett*, for noen tall er delelig med $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, i alt $\lfloor 2012/30 \rfloor = 67$ tall. Disse har vi telt tre ganger, så har vi overkompensert og trukket dem fra tre ganger, så vi må legge dem til igjen: I alt $1408 + 67 = 1475$ tall mindre enn 2013 er delelig med enten 2, 3 eller 5.

Vi er interessert i de som *ikke* er delelig med noen av disse, og de er $2012 - 1475 = 537$ i tallet. (Vi har helt sett bort fra delelighet med 4, for et tall som ikke er delelig med 2 er heller ikke delelig med 4.) 537



- (29) **Oppgave 10 2012/2013.** Multipliser ut produktet $(2a + 1)(2b + 1)(2c + 1) = 8abc + 4ab + 4bc + 4ca + 2a + 2b + 2c + 1 = 2 \cdot 1006 + 1 = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Siden alle faktorene til venstre er 3 eller større, og fordi 3, 11 og 61 er primtall, må $2a + 1$, $2b + 1$ og $2c + 1$ være tallene 3, 11 og 61, ikke nødvendigvis i den rekkefølgen. Rekkefølgen spiller heldigvis ingen rolle for summen, som blir $a + b + c = 1 + 5 + 30 = 36$ 36
- (29) **Oppgave 8 2013/2014.** Et tresifret palindrom har formen $100a + 10b + a = 101a + 10b$, der a og b er tallsifre med $a \neq 0$. Tverrsummen er $2a + b$. Dersom $a = b$ er tallet $111a$ og tverrsummen $3a$, som går opp i tallet fordi $3 \mid 111$ (vi bruker en loddrett strek i betydningen «går opp i»). Det gir ni muligheter med $a = b$. I tilfellet $a \neq b$ må $2a + b \mid (101a + 10b) - 10(2a + b) = 81a$. Vi kan ikke ha $b = 0$, for $2a \nmid 81a$. La c være største felles divisor for a og b , og la $a' = a/c$, $b' = b/c$. Da må også $2a' + b' \mid 81a'$. Men nå har $2a' + b'$ ingen felles divisorer med a' , så $2a' + b' \mid 81$. Siden $a' \neq b'$ er $2a' + b' > 3$. Vi må også ha $2a' + b' < 27$, så vi konkluderer at $2a' + b' = 9$. Det gir mulighetene $(a', b') = (1, 7)$, $(2, 5)$ eller $(4, 1)$. Bare i det siste tilfellet kan $c > 1$. Så mulighetene for (a, b) er $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(4, 1)$ og $(8, 2)$ i tillegg til de ni med $a = b$. Til sammen har vi de 13 palindromene 111, 222, ..., 999, 171, 252, 414 og 828. 13
- (29) **Oppgave 10 2013/2014.** Vi søker positive heltall a og b med $2014a = 5991b + 289$. Men $5991 = 3 \cdot 2014 - 51$, så vi kan i stedet skrive dette som $51b = 2014(3b - a) + 289$. Fordi primtallet 17 går opp i både 289 og 51 men ikke i 2014, må 17 gå opp i $3b - a$. Det er også klart at $3b - a \geq 0$ om $b > 0$, og minste mulige verdi for $3b - a$ gir også minste mulige verdi for b . 51 går ikke opp i 289, så $3b - a \neq 0$. Vi forsøker med $3b - a = 17$. Det gir $51b = 2014 \cdot 17 + 289$, som er ekvivalent med $3b = 2014 + 17 = 2031$. Siden 3 går opp i 2031 er dette et mulig valg, og det gir $b = 2031/3 = 677$ 677
- (29) **Oppgave 4 2014/2015.** Siste siffer i $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ avhenger bare av siste siffer i a_{n-1} og a_{n-2} . Siste siffer i $a_0, a_1, a_2, \dots$ blir 0, 1, 3, 7, 5, 1, 3, ..., og de siste fire tallene i denne følgen gjentas i det uendelige. Siden $2014 = 2012 + 2$ og 2012 er delelig med 4, er siste siffer i a_{2014} lik siste siffer i a_2 , altså 3. ... 3



- (30) **Oppgave 9 2014/2015.** La N være antall sjokoladebiter i esken. Nils får først 15 hauger med a biter i hver, og finner $N = 15a + 12$. Han spiser de tolv, og oppdager at $15a = 16b + 13$. Han spiser de tretten, og oppdager at $16b = 18c + 14$. Han spiser de fjorten og nitten til, så $18c > 19$, og derfor $c \geq 2$. (I tilfelle det er uklart, må a , b og c være heltall.) Den siste ligningen gir $8b = 9c + 7$, så 8 går opp i $9c + 7$, og derfor også i $9c + 7 - 8(c + 1) = c - 1$. Derfor er $c = 8x + 1$, der $x \geq 1$ er et heltall. Vi nøster historien tilbake ett trinn til, og finner $15a = 16b + 13 = 18c + 27 = 18 \cdot 8x + 45$, det vil si $5a = 48x + 15$. Det følger at $x = 5u$ for et heltall u , så $N = 15a + 12 = 18 \cdot 8x + 57 = 18 \cdot 40u + 57 = 720u + 57$. Siden $u \geq 1$ og $N < 1000$ er $u = 1$, så $N = 720 + 57 = 777$ 777

- (30) **Oppgave 10 2014/2015.** Om $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ kan vi bytte om på tallene slik at ligningen fortsatt holder, og slik at a er det største av de fire tallene. Da må b være det minste av dem. Etter å ha byttet om c og d om nødvendig, er da $a > c > d > b$. Vi skriver om ligningen først til formen $a^2 - c^2 = d^2 - b^2$, og videre til $(a + c)(a - c) = (d + b)(d - b)$.

Her har begge faktorene på venstre side samme paritet (de er begge odde eller begge partall), og det samme gjelder på høyre side. Det følger at alle fire faktorer har samme paritet. Fra ulikhetene ovenfor er $a + c > d + b$, og dermed $d - b > a - c$. Fordi $a - c \geq 1$ og $d - b$ har samme paritet som $a - c$, må da $d - b \geq 3$.

Med $b = 1$ og $d - b = 3$ blir $(d + b)(d - b) = 15$, som leder til $a + c = 15$ og $a - c = 1$, altså $b = 1$, $d = 4$, $c = 7$ og $a = 8$, med $bdca = 224$.

Dette er minste mulige verdi for produktet: Hvis $b \geq 2$, blir $bdca \geq 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 > 224$. Anta derfor at $b = 1$. Da må $d \geq 4$. Vi har allerede undersøkt tilfellet $d = 4$ i avsnittet over. Hvis $d = 5$ blir $a - c = 2$ (fordi $a - c < d - b = 4$ med samme paritet), så $bdca \geq 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 > 224$. Og hvis $d \geq 6$ blir $bdca \geq 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 > 224$.

. 224

- (30) **Oppgave 1 2015/2016.** Start med å faktorisere: $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = a^2(a + b) - b^2(a + b) = (a - b)(a + b)^2$. Så $(a - b)(a + b)^2 = 2^{10}$, og derfor $a - b = 2^m$ og $a + b = 2^n$ der m og n er positive heltall med $m + 2n = 10$. Videre er $m < n$ fordi $a - b < a + b$. Det gir $10 = m + 2n > 3m$, så $m \leq 3$. Men $m = 10 - 2n$ er et partall, så $m = 0$ eller $m = 2$. Hvis $m = 0$ er $n = 5$, $a - b = 1$ og $a + b = 2^5 = 32$. Men da er $a = 33/2$, som ikke er et heltall. Med $m = 2$, derimot, blir $n = 4$, $a - b = 2^2 = 4$ og $a + b = 2^4 = 16$. Det gir $a = (16 + 4)/2 = 10$ 10



- (30) **Oppgave 3 2015/2016.** To divisorer betyr at tallet er et primtall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 eller 31, altså $C = 11$. Tre divisorer betyr at tallet må være kvadratet av et primtall: 4, 9, 25, altså $B = 3$. Et tall med fire divisorer er enten tredje potens til et primtall (8 eller 27) eller produktet av to forskjellige primtall (6, 10, 14, 22, 26, 15 eller 21), altså $A = 9$. Produktet av alle tre blir $ABC = 297$ 297

- (30) **Oppgave 6 2015/2016.** Skriv om likningen til $2016 = xy$, der $x = a + b$ og $y = b - a$. Heltallene x og y har samme paritet, og siden 2016 er et partall må både x og y være partall. Omvendt vil enhver faktorisering $2016 = xy$ med x og y partall og $x > y > 0$ gi en positiv løsning $a = (x - y)/2$, $b = (x + y)/2$ til $2016 + a^2 = b^2$. Merk at $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. I enhver faktorisering $2016 = xy$ i partall x, y må $x = 2^i 3^j 7^k$ og $y = 2^{5-i} 3^{2-j} 7^{1-k}$ der $1 \leq i \leq 4$, $0 \leq k \leq 2$ og $0 \leq j \leq 1$. Det gir $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ forskjellige løsninger, og på grunn av symmetrien vil $x > y$ i nøyaktig halvparten av disse. (Vi får aldri $x = y$, for 2016 er ikke et kvadrattall.) 12

- (30) **Oppgave 1 2016/2017.** Fordi $2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7$, så er $2016k$ alltid delelig med hvert av de ønskede tallene bortsett fra 5 og 10. Men 2016 er ikke delelig med 5, så vi må ha $5 \mid k$, og da blir automatisk $10 \mid 2016k$, siden 2016 er et partall. Altså er det minste positive heltallet $k = 5$ 5

- (31) **Oppgave 4 2016/2017.** Skriv $n - 14 = k^2$. Så må enten $n + 37 = (k + 1)^2$ eller $n + 37 = (k + 2)^2$. Den siste muligheten inntreffer bare hvis n selv er et kvadrattall. Men fordi $n - 14$ og $n + 37$ har motsatt paritet, mens k^2 og $(k + 2)^2$ har samme paritet, er ikke det mulig. Vi har derfor $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2 = n + 37 - (n - 14) = 51$, som gir $k = 25$. Derfor er $n = k^2 + 14 = 639$ 639

- (31) **Oppgave 8 2016/2017.** Dersom n ender på eksakt k niere (med $k = 0, 1, 2$ eller 3), er $t(n + 1) = t(n) + 1 - 9k$, så

$$a_{n+1} = a_n + 9k.$$

Dermed danner tallene $b_n = a_n/9$ en voksende følge av heltall som starter med $b_1 = 0$ og ender med $b_{2017} = 2007/9 = 223$. Tallene b_n inkluderer alle de 224 tallene fra 0 til 223, med unntak av noen få som hoppes over. Når n ender med to niere ($n = 99, 199, \dots, 899$ og $n = 1099, 1199, \dots, 1899$), hopper følgen over ett tall mellom b_n og b_{n+1} . Og når n ender med tre niere ($n = 999$ og $n = 1999$), hopper den over to tall. I alt hopper den over $18 + 2 \cdot 2 = 22$ tall, og vi står igjen med $224 - 22 = 202$ forskjellige tall. 202

- (31) **Oppgave 2 2017/2018.** Svaret er 1 (og ikke 211, som man kunne fristes til å tro). 1



- (31) **Oppgave 3 2017/2018.** Om $100a + 10b + c$ er et tresifret geometrisk tall, må $a/b = b/c$, altså $ac = b^2$. Her er a, b og c heltall mellom 1 og 9. For å finne det største tallet, prøver vi med $a = 9$ og ser etter $c < 9$ slik at ac er et kvadrattall. Største mulighet er $c = 4$, som gir $b = 6$ og tallet 964. For det minste tallet prøver vi med $a = 1$, og ender med 124. Forskjellen er $964 - 124 = 840$. . 840

Anta at sifrene er ordnet. Hvis ikke, kan tallet gjøres større eller mindre ved å ordne sifrene.

- (31) **Oppgave 9 2017/2018.** Det minste tallet med fem forskjellige primfaktorer er $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 1000$, så vi trenger bare vurdere tall med høyst fire forskjellige primfaktorer. Tallet $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ har i alt $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ divisorer. Ved å sortere eksponentene a, b, c, d i avtagende rekkefølge, gjør vi n mindre, mens antall divisorer er uendret. Derfor er det nok å se på tilfellet $a \geq b \geq c \geq d$. Med fire forskjellige primfaktorer finner vi $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ med $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ divisorer. ($2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 > 1000$, så vi har ikke flere kandidater å ta av.) Med tre forskjellige primfaktorer har vi kandidatene $2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$ ($7 \cdot 2 \cdot 2$ divisorer), $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ ($5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ divisorer) og $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$ ($3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ divisorer). Og med bare to primfaktorer er det beste vi kan få til $2^5 \cdot 3^3 = 864$, med $6 \cdot 4 = 24$ divisorer. 840

- (31) **Oppgave 5 2018/2019.** Fordi $T_{n+4} = T_n + 4n + 10$, gjelder at $T_n \mid T_{n+4}$ hvis og bare hvis $T_n \mid 4n + 10$. En tabell oppsummerer situasjonen for små n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$4n + 10$	14	18	22	26	30	34	38	42	46
$T_n \mid 4n + 10$	ja	ja	nei	nei	ja	nei	nei	nei	nei

Når $n \geq 10$, er $T_n > 4n + 10$, så det er ikke nødvendig å undersøke videre. (Dette vises lettest ved å notere at $T_{n+1} = T_n + n + 1$, så T_n vokser raskere med n enn $4n + 10$ så lenge $n + 1 > 4$.) Svaret blir $1 + 2 + 5 = 8$ 8

- (31) **Oppgave 6 2018/2019.** Benytt konjugatsetningen $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, og legg merke til at når a og b er heltall, så har $a - b$ og $a + b$ samme paritet: De er begge oddetall, eller begge er partall. Derfor er $a^2 - b^2$ enten et oddetall eller delelig på 4. (En variant av dette resonnementet: Skriv $a = b + d$, så blir $a^2 - b^2 = d^2 + 2bd$. Det er lett å se at dette blir et oddetall om d er odde, og delelig på 4 om d er et partall.)

Hvis n er et oddetall, så er $n = 2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ der k er et heltall, så n har den ønskede formen. Og dersom n er delelig på 4, gjelder tilsvarende $n = 4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$, nok en gang på den ønskede formen. Det finnes 500 oddetall mellom 1 og 999 ($n = 2k - 1$ for $k = 1, 2, \dots, 500$) og 249 tall delelig på 4 ($n = 4k$ for $k = 1, 2, \dots, 249$). I alt $500 + 249 = 749$ 749



- (31) **Oppgave 7 2018/2019.** Vi multipliserer ligningen $a + b + c = 2019$ med 3 og trekker fra ligningen $2a + 3b - 5c = 0$, med resultat $a + 8c = 3 \cdot 2019 = 6057$. For at $a > 0$ må vi ha $8c < 6057$, som er ekvivalent med $c \leq 757$ siden c er et heltall. Vi prøver oss med $c = 757$, som gir $a = 6057 - 8 \cdot 757 = 1$, og dermed $3b = 5c - 2a = 5 \cdot 757 - 2 = 3783$, som er delelig med 3, slik at b blir et heltall (som vi kunne funnet ut raskere med litt enkel regning modulo 3.)757

- (32) **Oppgave 9 2018/2019.** Vi tar først et eksempel for å illustrere metoden vi vil bruke: *Hvor mange naturlige tall går opp i 600?* Start med å faktorisere 600 i primtall: $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Om 600 er delelig på et naturlig tall x , så kan ikke x inneholde andre primfaktorer enn 2, 3 og 5, og ingen av dem med høyere potens enn de tilsvarende potensene i faktoriseringen av 600. Eller kortere fortalt: x må ha formen $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, med $i \leq 3$, $j \leq 1$ og $k \leq 2$ – og omvendt vil 600 være delelig på alle tall på denne formen. Det er 4 mulige verdier for i , 2 mulige verdier for j , og 3 mulige verdier for k . Tilsammen gir det $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ muligheter, så 600 er delelig på eksakt 24 naturlige tall.

Nøyaktig samme resonnement gir som generelt resultat: Om et tall N har primtallsfaktorisering $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$ der $p_1, p_2, \dots, p_m$ er forskjellige primtall, så er N delelig på nøyaktig $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_m + 1)$ naturlige tall.

Vi leter altså etter naturlige tall $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$ med $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_m + 1) = 20$. Det betyr at vi må betrakte alle måter å faktorisere 20 på, i et produkt av faktorer som er større enn 1 (siden hver n_k er positiv). Men $20 = 2^2 \cdot 5$, så dette kan gjøres på fire måter: 20 (et «produkt» med én faktor), $10 \cdot 2$, $5 \cdot 4$ og $5 \cdot 2 \cdot 2$. Det betyr at vi leter etter tall med den primtallsfaktorisering på en av de fire formene p_1^{19} , $p_1^9 \cdot p_2$, $p_1^4 \cdot p_2^3$ eller $p_1^4 \cdot p_2 \cdot p_3$.

Fordi $2^{10} = 1024 > 1000$, er de to første av disse umulig. Og fordi $5^4 \cdot 2^2 > 1000$, er det bare nødvendig å undersøke $p_1 = 2$ og $p_1 = 3$ i de to siste tilfellene.

Prøv først med $p_1 = 2$: Det gir $p_1^4 = 16$, og $\lfloor 1000/16 \rfloor = 62$ ($\lfloor x \rfloor$ er x avrundet ned til nærmeste heltall). Forsøk å få p_2^3 eller $p_2 p_3$ så tett oppunder 62 som mulig: Det beste er $3 \cdot 19 = 57$, som gir tallet $16 \cdot 57 = 912$.

Prøv deretter med $p_1 = 3$: Det gir $p_1^3 = 81$, og $\lfloor 1000/81 \rfloor = 12$. Forsøk så å få p_2^3 eller $p_2 p_3$ så tett oppunder 12 som mulig: Det beste er $2 \cdot 5 = 10$, som gir tallet $81 \cdot 10 = 810$. Men løsningen for $p_1 = 2$ ble større.912

- (32) **Oppgave 1 2019/2020.** Summen av *alle* tallene fra 1 til 47 er $1 + 2 + 3 + \dots + 47 = (47 \cdot 48)/2 = 47 \cdot 24$. Summen av de som er delelig med 6 er $6 + 12 + \dots + 42 = 6 \cdot (1 + 2 + \dots + 7) = 6 \cdot (7 \cdot 8)/2 = 7 \cdot 24$. Differansen er $(47 - 7) \cdot 24 = 960$. 960



- (32) **Oppgave 6 2019/2020.** Oppgaven går ut på å finne summen av alle tall c der $a^2 + b^2 = c^2$ med heltallige, positive a , b og c , der minst ett av tallene er 12. To løsninger der a og b er byttet om, regnes bare én gang i summen.

Vi prøver først $c = 12$. Da må a og b ha samme paritet. Hvis begge er partall, $a = 2x$ og $b = 2y$, blir $x^2 + y^2 = 6^2$. Men vi ser raskt at $6^2 - x^2$ ikke er et kvadrattall for $x = 1, 2, 3, 4$ eller 5 , så dette gir ingen løsning. På den annen side, hvis både a og b er oddetall, $a = 2x + 1$ og $b = 2y + 1$, blir $4(x^2 + y^2 + x + y) + 2 = 6^2$, som er en motsigelse fordi 4 går opp i høyresiden, men ikke i venstresiden. Dermed er $c = 12$ ikke en mulighet.

Det gjenstår å prøve med $b = 12$. Vi skriver om $a^2 + 12^2 = c^2$ på formen $144 = (c - a)(c + a)$. Faktorene $c - a$ og $c + a$ har samme paritet, og må derfor begge være partall. Hver faktorisering av 144 i to forskjellige partall m, n med $m < n$ (det vil si $m < 12$) gir en løsning der $c - a = m$ og $c + a = n$. I denne løsningen er $c = \frac{1}{2}(m + n)$.

Partallene som går opp i $144 = 2^4 \cdot 3^2$ og slik at kvotienten også er et partall, har formen $2^j \cdot 3^k$ der $j \in \{1, 2, 3\}$ og $k \in \{0, 1, 2\}$. Dette gir følgende kandidater for m : 2, 4, 8, 6 (resten er ≥ 12). For hver av disse regner vi ut $c = \frac{1}{2}(m + n)$ der $n = 144/m$, og får $c = 37, 20, 13, 15$. Summen av disse er 85. 85

- (32) **Oppgave 9 2019/2020.** Ingen av de 673 oddetallene 675, 677, ..., 2019 går opp i noe annet av disse tallene, fordi $3 \cdot 675 = 2025 > 2019$. På den annen side kan vi dele opp $\{1, 3, 5, \dots, 2019\}$ i 673 parvis disjunkte mengder $A_1, A_5, A_7, A_{11}, \dots, A_{2017}$ (en for hvert tall med rest 1 eller 5 etter divisjon med 6) der A_k består av alle tall $3^j \cdot k < 2020$ med $j \geq 0$. (Tallene k telles opp slik: en tredjedel av de $6 \cdot 336$ tallene 1, 2, 3 ..., 2016, og 2017 i tillegg, altså 673 i alt.) Om du velger to tall fra samme mengde A_k , vil det minste av dem gå opp i det største. Derfor er det ikke mulig å velge flere enn 673 tall uten at noen av dem går opp i et annet. 673

- (32) **Oppgave 3 2020/2021.** Vi skal ha $(b - a)(b + a) = 2021$. Nå er $2021 = 43 \cdot 47$ der faktorene er primtall, så enten er $b - a = 1$ og $b + a = 2021$, eller så er $b - a = 43$ og $b + a = 47$. Det passer, med $b = 45$ og $a = 2$.

Alternativt, om du ikke var kjent med primtallsfaktoriseringen av 2021, kunne du prøve å velge b med $b^2 > 2021$ og håpe at differansen blir et kvadrattall. Noen eksperimenter viser at $44^2 = 1936$ er for liten, mens $45^2 = 2025$, og $2025 - 2021 = 4$ er et kvadrattall. Bingo! 47



- (32) **Oppgave 8 2020/2021.** Et tall med primtallsfaktorisering på formen $2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot 5^{k_5} \cdot \dots$ har $(k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_5 + 1) \cdot \dots$ divisorer, nemlig alle tall på formen $2^{j_2} \cdot 3^{j_3} \cdot 5^{j_5} \cdot \dots$ med $0 \leq j_p \leq k_p$ for hvert primtall p .

N har fire divisorer, så vi må enten ha $N = p^3$ der p er et primtall, eller $N = pq$ der p og q er to forskjellige primtall.

Siden $N + 1$ har et odde antall divisorer, må $N + 1$ være et kvadrattall (hver k_p må være et partall i primtallsfaktoriseringen av $N + 1$).

Skriv $N + 1 = n^2$. Så er $N = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Dersom $N = p^3$ for et primtall p , må enten $n - 1 = 1$ og $n + 1 = p^3$, dermed $p^3 = 3$, som er umulig; eller $n - 1 = p$ og $n + 1 = p^2$, dermed $p(p - 1) = p^2 - p = 2$, som gir $p = 2$, $n = 3$, $N = 3^2 - 1 = 8$. Men vi kan finne større N : Den andre muligheten er nemlig $n - 1 = p$ og $n + 1 = q$, for primtall p og q . Slike primtall kalles *primtallstvillinger*. Ingen vet om det finnes uendelig mange av dem, men heldigvis slipper vi å bekymre oss om det. Vi har primtallstvillinger 29 og 31, med produkt $30^2 - 1 = 899$. Neste primtallstvillingpar etter det er 41 og 43, men $41 \cdot 43 > 1000$, så vi trenger ikke lete mer. 899

- (32) **Oppgave 9 2020/2021.** Vi skal ha $(a + b^2) = 2^2 \cdot 505 \cdot a$, der 505 er kvadrattfri (ingen kvadrattall deler 505). Derfor må a ha formen $a = 505 \cdot c^2$ for et heltall $c > 0$. Så blir $a + b = 505 \cdot 2 \cdot c$. Fordi $a + b > a$, må $2c > c^2$, så $c = 1$, og derfor $a + b = 1010$ 505

- (32) **Oppgave 1 2021/2022.** Primtallsfaktoriseringen av de gitte tallene er $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$ og $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Minste felles multiplum blir $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ 84

- (33) **Oppgave 7 2021/2022.** Vi faktoreriserer hver faktor i $10!$ i primfaktorer, og samler potenser av hvert primtall for seg. Resultatet er $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Divisorene til dette tallet har formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ med $0 \leq a \leq 8$, $0 \leq b \leq 4$, $0 \leq c \leq 2$ og $0 \leq d \leq 1$. Det gir i alt $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$ mulige divisorer. Av disse er $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ kvadrattall (altså med a, b, c og d partall). Så svaret er $270 - 30 = 240$ 240



- (33) **Oppgave 9 2021/2022.** Merk først at $792 = 8 \cdot 99$. Hvis vi dividerer Nils' tall $N = 101112 \dots 9899$ med 8, bestemmes resten bare av de tre siste sifrene, fordi 8 går opp i 1000. Men $899 = 8 \cdot 12 + 3$, så *den* resten er 3. Fordi 100 gir rest 1 når vi dividerer med 99, og det samme gjelder om vi dividerer 100^k med 99, får tallet til Nils samme rest som tallet $10 + 11 + 12 + \dots + 97 + 98 + 99 = 4905$ etter divisjon med 99. Vi gjentar resonnementet, og finner resten $49 + 5 = 54$.

Dette er ikke ulikt hvordan du finner resten etter divisjon med 9 ved å ta tverrsummen igjen og igjen inntil du står tilbake med ett siffer. Her gjør vi det samme i et tallsystem med grunntall 100.

Så langt har vi at $8 \mid N - 3$ og $99 \mid N - 54$. ($m \mid n$ betyr at m går opp i n .)

Spesielt er $N - 54 = 99i$ for et heltall i , og derfor $N - 3 = 99i + 51 = 99(i + 1) - 48$. Fordi $8 \mid N - 3$ og $8 \mid 48$, må $8 \mid 99(i + 1)$, og derfor $8 \mid i + 1$, siden 8 og 99 ikke har noen felles faktor større enn 1 (de er «innbyrdes primiske»). La oss si $i + 1 = 8j$, slik at $N - 3 = 792j - 48$, altså $N = 792j - 45$. Siden resten vi ser etter må ligge mellom 0 og 792, må $j = 1$, så $N = 792 - 45 = 747$.

Dersom du er kjent med modularegning, kan denne løsningen skrives noe kortere. Løsningsmetoden er inspirert av såkalte *kinesiske rester*. Slike problemer ble undersøkt av Sünzī Suànjing en gang i tredje til femte århundre etter vår tidsregning. 747

- (33) **Oppgave 5 2022/2023.** Dersom $q = r$ får vi $q \mid p + 2q$ (streken betyr «går opp i»), men da må $q \mid p$. Siden begge er primtall, må $p = q$, så alle tre er like. Mer generelt, om to av de tre tallene er like, er alle tre like (fordi vi kan bytte om på de tre tallene som vi vil uten å endre noe.) Det er klart at betingelsene er oppfylt om $p = q = r$.

Vi må undersøke tilfellet der alle tre er forskjellige. Men dersom to eller flere distinkte primtall går opp i et tall n , så vil også produktet av disse primtallene gå opp i n . I vårt tilfelle betyr det at $pqr \mid p + q + r$. Om r er det største av de tre primtallene, er $p + q + r < 3r$, men samtidig er $pqr \geq 6r$, siden de minste mulighetene for p og q er 2 og 3. Altså er $p + q + r < pqr$, så det finnes ingen eksempler med p, q og r forskjellige.

Vi står altså bare igjen med tilfellene $p = q = r$. Da er $pqr = p^3$. Siden $11^3 = 1331 < 2023$ og $13^3 = 2197 > 2023$, må $p = 11$, og $p + q + r = 3p = 33$.

..... 33



- (33) **Oppgave 7 2022/2023.** Benytt primtallsfaktoriseringen $2023 = 7 \cdot 17^2$. Produktet går opp i $\frac{(a+k)!}{a!} = (a+k)(a+k-1) \cdots (a+1)$ presis når 7 går opp i en av faktorene $a+1, \dots, a+k$, og enten 17 går opp i minst to av dem, eller 17^2 går opp i minst en av dem. Denne betingelsen er oppfylt for $k \geq 34$ (vi trenger ikke se på 17^2 , må bare sikre oss to multipler av 17). Den holder ikke for $k = 33$: Ett eksempel er $a = 17$, siden 17 bare går opp i ett av tallene 18, ..., 50 (nemlig 34 – men den bommer akkurat på 17 og 51). 33
- (33) **Oppgave 9 2022/2023.** Prøv å lage fullstendige kvadrater: Skriv ligningen på formen $4m^2 - 4mn + n^2 - m^2 - 2m - 1 = 799$, det vil si $(2m-n)^2 - (m+1)^2 = 799$. Bruk så konjugatsetningen, og få $(2m-n+m+1)(2m-n-m-1) = 799$, forenklet $(3m-n+1)(m-n-1) = 799$. Forskjellen mellom de to faktorene på venstresiden er $2m+2$, som vi må prøve å gjøre størst mulig. Det kan ikke gjøres bedre enn $3m-n+1 = 799$ og $m-n-1 = 1$. Etter den siste ligningen er da $n = m - 2$. Sett det inn i den første ligningen, og få $2m+3 = 799$, altså $m = 398$ 398
- (33) **Oppgave 5 2023/2024.** Tallsifrene 1, 2, 3, 5 og 7 har alle forekommet minst tre ganger hver når Ellen har kommet til $n = 17$. 19 og 29 er primtall, og $38 = 2 \cdot 19$, så Ellen har tre niere etter $n = 38$. Videre er 41, 43 og 47 primtall, så Ellen har tre firere etter $n = 47$. Tre nuller er neste milepæl, siden 101, 103 og 107 alle er primtall. For seksere merker vi oss at 61 og 67 er primtall, og tre seksere er i boks etter $n = 2 \cdot 61 = 122$. Til sist er 83 og 89 primtall, men ingen andre på åttitallet – så Ellen må opp til $n = 2 \cdot 83 = 166$ for å få tre åttere. 166
- (33) **Oppgave 7 2023/2024.** Om n er et heltall og d en divisor til n , er også n/d en divisor til n . For at strengt mer enn halvparten av divisorene til n er ensifrede, er det derfor nødvendig at det finnes minst en divisor d slik at både d og n/d er ensifrede. Siden største ensifrede tall er 9, må derfor $n = d \cdot n/d \leq 9 \cdot 9 = 81$. Og $n = 81$ oppfyller kravet: Divisorene er 1, 3, 9, 27, 81. 81
- (34) **Oppgave 3 2024/2025.** Vi tar summen av de to første sifrene i hvert av tallene først: Den blir $100 \cdot (1+9) + 26 \cdot (2+0) = 1052$. Så tar vi siste siffer i tallene som starter på 19: Her forekommer hvert av sifrene 0, 1, ..., 9 ti ganger hver, så summen blir $10 \cdot (0+1+2+\dots+9) = 10 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 450$. Det samme gjelder nest siste siffer. Så tar vi siste siffer i tallene som starter med 20: Summen blir $2 \cdot (0+1+\dots+9) + 0+1+2+3+4+5 = 2 \cdot 45 + 15 = 105$. Og summen av nest siste siffer i disse tallene blir $10 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 22$. Alle sifrene til sammen får sum $1052 + 450 + 450 + 105 + 22 = 2079$, som er delelig med 3.



Alternativ løsning, for de som er kjent med modulo-regning og gjetter på at svaret er 3: Husk at tverrsummen til et tall er kongruent med tallet selv, modulo 9 – og derfor også modulo 3. Summen av tre påfølgende tall er kongruent med 0 modulo 3, siden $k + (k+1) + (k+2) = 3(k+1)$. Og da gjelder det samme for summen av tverrsummene til disse tallene. Siden det er $126 = 3 \cdot 42$ tall fra og med 1900 til og med 2025, er summen av tverrsummen til alle disse tallene også kongruent med 0 modulo 3. 3

- (34) **Oppgave 6 2024/2025.** Skriv $m = x^2$ der x er et positivt heltall. Vi skal ha $x^2 - 1001 = y^2$, der også y er et positivt heltall. (Merk at om y gjøres mindre, er også x mindre.) Skriv om til $(x+y)(x-y) = 1001$. Altså $x-y = a$, $x+y = b$ der a og b er heltall med $0 < a < b$ og $ab = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Da er også $2x = a+b$ og $2y = b-a$. Så y , og dermed x , blir minst mulig når de to faktorene a og b er så nær hverandre som mulig, med andre ord a størst mulig. Det skjer med $a = 13$ og $b = 7 \cdot 11 = 77$, som gir $y = \frac{1}{2}(b-a) = 32$, dermed $m = x^2 = 1001 + 32^2 = 2025$ 9

Faktoriseringen av 1001 er ikke så vanskelig å gjette, hvis du kjenner testen for delbarhet med 11: Ta alternerende tverrsum, det vil si summen av annethvert siffer i tallet minus summen av de øvrige sifrene. Hvis resultatet er delelig med 11, er også det opprinnelige tallet delelig med 11. Slik ser du med en gang at 1001 er delelig med 11, og så regner du ut $1001/11 = 91 = 7 \cdot 13$.

- (34) **Oppgave 10 2024/2025.** Om det tosifrede tallet er x og det tresifrede tallet er y , så er $9xy = 1000x + y$. Skriv det som $(9y - 1000)x = y$, altså $zx = y$ der $z = 9y - 1000$. Erstatte vi så y med zx i den første ligningen, får vi $9x^2z = 1000x + zx$, som vi forkorter med x og skriver om til $(9x-1)z = 1000$. Med andre ord: $z \mid 1000$. (Notasjonen er kort for at z deler (går opp i) 1000.) Men vi kan også skrive $9xz - z = 999 + 1$, eller bedre $z + 1 = 9 \cdot (xz - 111)$, det vil si at vi kan skrive $z = 9k - 1$ for et heltall k .

Vi kan også utnytte at $y < 1000$ og $x \geq 10$, slik at $z = y/x < 1000/10 = 100$, og dermed $k \leq 11$. Det er bare ett valg av k med $1 \leq k \leq 11$ som gir $9k - 1 \mid 1000$, nemlig $k = 1$. Det gir $z = 8$, $y = (1000 + z)/9 = 1008/9 = 112$, $x = y/z = 14$, og $x + y = 126$. En kontrollregning viser ganske riktig at $9 \cdot 14 \cdot 112 = 14112$ 126