Litt topologi

Harald Hanche-Olsen
hanche@math.ntnu.no

De reelle tall

En grunnleggende egenskap ved de reelle tall, som skiller dem fra de rasjonale tall, er *kompletthetsaksiomet*. Det har flere ekvivalente former. Her skal vi konsentrere oss om en av dem. Men først noen definisjoner. Vi skriver $\mathbb{R}$ for mengden av reelle tall.

1 Definisjon. En mengde av reelle tall $A \subseteq \mathbb{R}$ kalles *oppad begrenset* dersom det finnes et reelt tall M slik at $a \le M$ for alle $a \in A$. Et slikt tall kalles en *øvre grense* for A.

Tilsvarende kalles A *nedad begrenset* dersom det finnes et reelt tall m slik at $a \ge m$ for alle $a \in A$. Et slikt tall kalles en *nedre grense* for A.

Dersom A er både oppad og nedad begrenset, kalles den rett og slett *begrenset*. Ekvivalent er at det finnes et reelt tall M slik at $|a| \le M$ for alle $a \in A$. Dette siste gir også mening for mengder av *komplekse* tall.

Kompletthetsaksiomet for de reelle tall fastslår at dersom A en en opptil begrenset, ikketom mengde av reelle tall, så har A en *minste øvre grense*, det vil si en øvre grense S med den egenskapen at for enhver annen øvre grense M gjelder $S \le M$. Denne minste øvre grense kalles også As *supremum*, og skrives $S = \sup A$.

Dersom A ikke har noen øvre grense, skriver vi $\sup A = \infty$. Dersom vi også legger til definisjonen $\sup \emptyset = -\infty$, har dermed alle delmengder av $\mathbb{R}$ et supremum.

Merk at $\sup A$ er entydig gitt ved at

$$a \le \sup A \text{ for alle } a \in A, \text{ og}$$
$$\text{for alle } b < \sup A \text{ finnes } a \in A \text{ med } a > b.$$

Det følger av kompletthetsaksiomet at enhver nedad begrenset mengde har en største nedre grense, som kalles *infimum* til mengden og skrives $\inf A$. (Oppgave: Vis dette! Hint: Vis at $\inf A = \sup(-A)$, der $-A = \{a\colon\ -a \in A\}$.)

En fundamental konsekvens av kompletthetsaksiomet er det faktum at en monoton, begrenset følge av reelle tall er konvergent.

Nedenfor skriver jeg en tallfølge $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ som $\bigl(x_k\bigr)_{k=1}^{\infty}$, eller enda kortere bare som (x_k). Jeg minner om at følgen kalles *ikkeavtagende* dersom $x_{k+1} \ge x_k$ for alle k, og *ikkevoksende* dersom $x_{k+1} \le x_k$ for alle k. Den kalles *monoton* dersom den er en av delene.

2 Proposisjon. *Enhver monoton, begrenset følge av reelle tall er konvergent.*

Bevis: Jeg viser dette bare for en ikkeavtagende, begrenset følge (x_k). Beviset for ikkevoksende følger er tilsvarende, eller følger ved å erstatte x_k med $-x_k$.

La $s = \sup\bigl\{x_k \colon k = 1, 2, 3, \dots\bigr\}$. Jeg påstår at $x_k \to s$ når $k \to \infty$.

La nemlig $\varepsilon > 0$. Da finnes en n med $x_n > s - \varepsilon$. For alle $k \ge n$ gjelder da $s - \varepsilon < x_n \le x_k \le s$, og av dette følger $|x_k - s| < \varepsilon$. Vi har dermed vist at $x_k \to s$, som påstått. ∎

Kompakthet

Vi kan danne en *delfølge* av en følge (z_k) ved å velge (heltallige) indekser $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ og lage en ny følge $z_{k_1}, z_{k_2}, z_{k_3}, \dots$. Med andre ord, om $w_j = z_{k_j}$ for alle j så er (w_j) en delfølge av (z_k). Merk at vi må ha $k_1 \ge 1$, og ved induksjon $k_j \ge j$ for alle j, slik at $k_j \to \infty$ når $j \to \infty$.

3 Definisjon. En delmengde $K \subseteq \mathbb{C}$ av de komplekse tall kalles *kompakt* dersom enhver følge av tall i K har en konvergent delfølge, og grensen også tilhører K.

Jeg minner om at en mengde K av komplekse tall kalles *lukket* dersom det er slik at for enhver følge av tall i K som konvergerer mot et komplekst tall z, så er grensen z også i K.

4 Teorem. (Heine–Borel) *Enhver begrenset følge av komplekse tall har en konvergent delfølge.*

En mengde av komplekse tall er kompakt hvis og bare hvis den er lukket og begrenset.

Bevis: La først (x_k) være en begrenset følge av reelle tall. Vi definerer så

$$s_n = \sup\bigl\{x_k \colon k = n, n+1, \dots\bigr\}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Siden s_{n+1} er et supremum over en mindre mengde enn s_n, er $s_{n+1} \le s_n$. Med andre ord er (s_n) en *ikkevoksende* følge. Denne følgen er også begrenset, med samme øvre og nedre begrensning som den opprinnelige følgen (x_k). Dermed er den konvergent, så vi kan skrive $s_n \to t$ når $n \to \infty$. Merk at $s_n \ge t$ for alle n.

Jeg påstår at vi kan finne en delfølge av (x_k) som konvergerer mot t.

Velg først en indeks n_1 slik at $t \le s_{n_1} < t+1$. (Den første av disse ulikhetene holder automatisk.) Velg $k_1 \ge n_1$ slik at $s_{n_1} - 1 < x_{k_1} \le s_{n_1}$ (den andre av disse ulikhetene holder automatisk, mens vi kan få til den første takket være definisjonen av s_{n_1}). Slår vi disse ulikhetene sammen har vi

$$t - 1 \le s_{n_1} - 1 < x_{k_1} \le s_{n_1} < t + 1,$$

slik at $|x_{k_1} - t| < 1$.

Velg deretter en indeks $n_2 > k_1$ slik at $t \le s_{n_2} < t + \frac{1}{2}$, og velg så $k_2 \ge n_2$ slik at $s_{n_2} - \frac{1}{2} < x_{k_2} \le s_{n_2}$. Ved samme type regning som over finner vi $|x_{k_2} - t| < \frac{1}{2}$.

Vi fortsetter på samme måte, neste gang med $n_3 > k_2$ slik at $t \le s_{n_3} < t + \frac{1}{3}$, og $k_3 \ge n_3$ slik at $s_{n_3} - \frac{1}{3} < x_{k_2} \le s_{n_2}$, og finner $|x_{k_2} - t| < \frac{1}{3}$.

Generelt har vi nå $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ med $|x_{k_j} - t| < 1/j$, og dermed må $x_{k_j} \to t$ når $j \to \infty$. Dette fullfører beviset for første påstand for det tilfellet hvor vi har med *reelle* tall å gjøre.

La nå (z_k) være en begrenset følge av komplekse tall. Skriv $z_k = x_k + i y_k$ med $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Siden $|x_k| \le |z_k|$ og $|y_k| \le |z_k|$ er også følgene (x_k) og (y_k) begrenset. Nå finnes en konvergent delfølge av (x_k): La oss si $u_j = x_{k_j} \to a$.

Skriv så $w_j = z_{k_j} = u_j + i v_j$, der $v_j = y_{k_j}$. Det finnes en konvergent delfølge av (v_j): La oss si $v_{j_m} \to b$. Da vil $w_{j_m} = u_{j_m} + i v_{j_m} \to a + ib$, og følgen (w_{j_m}) er dermed en konvergent delfølge av (z_k). Første påstand holder derfor også for komplekse tallfølger.

For å vise den andre påstanden, la først K være en lukket og begrenset mengde av komplekse tall. Betrakt en vilkårlig følge (z_k) med $z_k \in K$ for alle k. Siden K er begrenset, er denne følgen begrenset. Ved ovenstående resultat har følgen en konvergent delfølge. Siden K er lukket, er grensen også i K. Dette viser at K er kompakt.

Omvendt, om vi antar at K er kompakt så må K være lukket: Anta nemlig at en følge i K konvergerer mot et komplekst tall z. Ved kompakthet finnes en delfølge som konvergerer mot et tall $w \in K$. Men enhver delfølge av en konvergent følge har samme grense som den opprinnelige følgen, så $z = w \in K$, og K er derfor lukket.

Om K er kompakt er K også begrenset, for om K var ubegrenset kunne vi finne en følge i K med $|x_k| \to \infty$. Men da gjelder det samme for enhver delfølge, så denne følgen har ingen konvergent delfølge. Dette strider mot kompakthet av K, og fullfører beviset. ∎

Vi kan nå lett bevise en annen variant av kompletthetsaksiomet. Men først en definisjon:

5 Definisjon. En tallfølge (z_k) kalles en *Cauchy-følge* dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes et naturlig tall n slik at hver gang $j \ge n$ og $k \ge n$ så er $|z_j - z_k| < \varepsilon$.

Litt mer uforsiktig uttrykt: To vilkårlige tall langt ute i følgen vil være nær hverandre.

Det er ikke vanskelig å vise at enhver konvergent følge er en Cauchy-følge. Omvendingen av dette utsagnet for reelle tall er ekvivalent med kompletthetsaksiomet slik vi har gjengitt det ovenfor, men vi skal bare vise at det følger fra kompletthetsaksiomet:

6 Korollar. *Enhver Cauchy-følge av komplekse tall er konvergent.*

Bevis: Det er tilstrekkelig å vise dette for følger av *reelle* tall, ved å betrakte realdel og imaginærdel hver for seg. (Oppgave: Vis det!)

Så la (x_n) være en Cauchy-følge av reelle tall. Det er ikke vanskelig å vise at da er følgen begrenset, (Oppgave: Vis det også!) så den har en konvergent delfølge: La oss si $x_{n_k} \to c$. Gitt $\varepsilon > 0$ så finnes et naturlig tall m_1 slik at hver gang $k \ge m_1$ så er $|x_{n_k} - c| < \varepsilon$, og det finnes et naturlig tall m_2 slik at hver gang $j \ge m_2$ og $k \ge m_2$ så er $|x_j - x_k| < \varepsilon$.

La m være den største av m_1 og m_2. Når $k \ge m$ så er da også $n_k \ge k \ge m$, så $|x_k - x_{n_k}| < \varepsilon$. Vi finner

$$|x_k - c| = |x_k - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \le |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

og $x_k \to c$ følger. ∎

7 Teorem. *Anta $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ er en nedstigende følge av ikketomme, kompakte mengder. Da finnes et felles punkt i alle disse mengdene; det vil si at snittet $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \ldots$ er ikketomt.*

Mer kortfattet: En nedstigende følge av ikketomme, kompakte mengder har ikketomt snitt.

Bevis: Velg et punkt $z_n \in K_n$ for $k = 1, 2, \ldots$. Siden $z_n \in K_1$ og K_1 er kompakt, finnes en konvergent delfølge: $z_{n_k} \to c$ når $k \to \infty$. Hver gang $j \ge k$ er $z_{n_j} \in$

K_{n_k}, slik at også $c \in K_{n_k}$ siden K_{n_k} er lukket. Ettersom $n_k \geq k$ er derfor $c \in K_k$ for alle k. ∎

Funksjoner på kompakte mengder. Kanskje den viktigste grunnen til at vi er interessert i kompakte mengder er at kompaktheten har nyttige konsekvenser for kontinuerlige funksjoner på disse mengdene.

8 Teorem. *En reell, kontinuerlig funksjon definert på en kompakt mengde oppnår sitt maksimum og minimum på mengden.*

Med andre ord, dersom K er kompakt og f er en reell, kontinuerlig funksjon definert på K så finnes $a, b \in K$ slik at $f(a) \leq f(z) \leq f(b)$ for alle $z \in K$.

Bevis: Med notasjon som i forklaringen ovenfor viser vi bare eksistensen av b. Eksistensen av a vises tilsvarende, eller følger fra eksistensen av b ved å betrakte funksjonen $-f$.

La $M = \sup\{f(z) \colon z \in K\}$. For $k = 1, 2, 3, \ldots$ velger vi $z_k \in K$ med $f(z_k) > M - 1/k$. Siden $f(z_k) \leq M$ er automatisk oppfylt, blir $|f(z_k) - M| < 1/k$, så $f(z_k) \to M$ når $k \to \infty$.

Vi må holde muligheten åpen for at $M = \infty$. Da vil ikke konstruksjonen over være mulig. I så fall velger vi i stedet $z_k \in K$ med $f(z_k) > k$, og konklusjonen $f(z_k) \to M$ når $k \to \infty$ holder fortsatt.

Siden K er kompakt, finnes en konvergent delfølge (w_j) av (z_k). La oss si $w_j \to b \in K$. Ved kontinuiteten av f finner vi $M = \lim_{j\to\infty} f(w_j) = f(b)$. Dette viser ikke bare at $M < \infty$, men vi har også $f(z) \leq M = f(b)$ ifølge definisjonen av M, og beviset er ferdig. ∎

9 Definisjon. En funksjon f definert på en mengde A kalles *uniformt kontinuerlig* på A dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at for alle $x, y \in A$ med $|x - y| < \delta$ gjelder $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Forskjellen mellom uniform kontinuitet og vanlig punktvis kontinuitet er at i uniform kontinuitet kan samme ε brukes for en gitt δ uansett hvor vi er. For vanlig (punktvis) kontinuitet må vi tillate at ε avhenger av såvel x som δ.

10 Eksempel. Betrakt funksjonen $f(x) = x^2$. Ved hjelp av tredje kvadratsetning finner vi $|f(x) - f(y)| = |x + y||x - y|$, og det viser at f ikke er uniformt kontinuerlig på $\mathbb{R}$: For gitt $\delta > 0$ og $\varepsilon > 0$ kan vi alltid velge $|x - y| = \frac{1}{2}\delta$ og $|x + y| > 2\varepsilon/\delta$, som gir $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Tilsvarende kan vi vise at funksjonen $g(x) = 1/x$ ikke er uniformt kontinuerlig på $(0, \infty)$. (Vi har $|g(x) - g(y)| = |x - y|/(xy)$.)

Det kan synes som at dette har å gjøre med at disse funksjonene har svært bratte grafer når $x \to \infty$ og $x \to 0$ henholdsvis, men det er bare en del av historien, for funksjonen $h(x) = \sqrt{x}$ er uniformt kontinuerlig på $[0, \infty)$.

11 Teorem. *En kontinuerlig funksjon er uniformt kontinuerlig på enhver kompakt delmengde av definisjonsområdet.*

Dette gjelder enten funksjonen har reelle eller komplekse verdier.

Bevis: La f være kontinuerlig (reell eller kompleks) på en kompakt mengde K. Anta at f *ikke* er uniformt kontinuerlig. Vi skal utlede en motsigelse.

Ved antagelsen finnes en $\varepsilon > 0$ slik at ingen $\delta > 0$ oppfyller kravet i definisjonen av uniform kontinuitet. Vi holder en slik ε fast. For hver $k = 1, 2, 3, \ldots$ velger vi derfor $z_k, w_k \in K$ med $|z_k - w_k| < 1/k$ mens $|f(z_k) - f(w_k)| > \varepsilon$.

Ved kompaktheten av K kan vi finne en konvergent delfølge (z_{k_j}), la oss si $z_{k_j} \to c \in K$. Siden $|z_{k_j} - w_{k_j}| < 1/k_j \to 0$ vil også $w_{k_j} \to c$.

Men nå er f kontinuerlig i c, så det finnes en $\delta > 0$ slik at hver gang $|z - c| < \delta$ er $|f(z) - f(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

For tilstrekkelig store indekser j er $|z_{k_j} - c| < \delta$ og $|w_{k_j} - c| < \delta$, og da blir $|f(z_{k_j}) - f(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ og tilsvarende $|f(w_{k_j}) - f(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dermed er

$$\begin{aligned}
|f(z_{k_j}) - f(w_{k_j})| &= \big|\big(f(z_{k_j}) - f(c)\big) - \big(f(w_{k_j}) - f(c)\big)\big| \\
&\le \big|f(z_{k_j}) - f(c)\big| + \big|f(w_{k_j}) - f(c)\big| \\
&< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,
\end{aligned}$$

som strider mot valget av z_k og w_k. ∎

Vi bruker ofte kontinuerlige funksjoner til å avbilde mengder på nye mengder, og da er neste resultat nyttig. Dersom f er en funksjon og K er inneholdt i definisjonsområdet til f så skriver vi $f[K] = \{f(x) \colon x \in K\}$, og kaller $f[K]$ *bildet av K ved f*. Vi sier også at f *avbilder* K på $f[K]$.

12 Proposisjon. *En kontinuerlig funksjon avbilder en kompakt delmengde av sitt definisjonsområde på en kompakt mengde.*

Med andre ord, om f er kontinuerlig og K er kompakt og inneholdt i definisjonsområdet til f så er $f[K]$ kompakt.

Bevis: Gitt en følge (w_k) i $f[K]$ kan vi per definisjon skrive $w_k = f(z_k)$ med $z_k \in K$. Velg en konvergent delfølge (z_{k_j}); la oss si $z_{k_j} \to c \in K$. Da er også følgen (w_{k_j}) konvergent, siden $w_{k_j} = f(z_{k_j}) \to f(c) \in f[K]$ ved kontinuiteten av f i punktet c. ∎

En anvendelse. La $\Omega \subset \mathbb{C}$ være en ekte, åpen delmengde av de komplekse tall. Vi kan definere *avstanden til komplementet*

$$d(z) = \inf\{|z-w|\colon w \in \mathbb{C}\setminus\Omega\}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Siden Ω er åpen, vil $d(z) > 0$ når $z \in \Omega$. Enda mer åpenbart er $d(z) = 0$ når $z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ (velg $w = z$).

Jeg påstår at *d er kontinuerlig*: For om $z, c \in \mathbb{C}$ og $w \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ så er $|z-w| = |z-c+c-w| \le |z-c| + |c-w|$. Tar vi nå infimum over alle $w \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ finner vi $d(z) \le |z-c| + d(c)$. Vi skriver om det til $d(z) - d(c) \le |z-c|$. Bytter vi om z og c får vi også $d(c) - d(z) \le |z-c|$, og dermed er $|d(z) - d(c)| \le |z-c|$. Fra denne ulikheten følger kontinuiteten av d umiddelbart.[1]

La nå K være en kompakt delmengde av Ω. Så må den kontinuerlige funksjonen d oppnå sitt minimum på K. Vi har altså en $a \in K$ slik at $d(a) \le d(z)$ for alle $z \in K$. Men siden $a \in K \subseteq \Omega$, er $d(a) > 0$. Denne minsteavstanden $d(a)$ kaller vi *avstanden* fra K til $\mathbb{C}\setminus\Omega$, og vi har vist at denne avstanden er positiv. Dette er svært nyttig i mange beviser, for eksempel i forbindelse med en parametrisert kurve i Ω, som er en kontinuerlig avbildning $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$. Siden parameterintervallet $[a,b]$ er kompakt, er også billedmengden $\gamma[a,b]$ kompakt, og dermed har også hele kurven en positiv avstand til komplementet av Ω. Eller sagt på en annen måte: En ε-omegn

$$\{z \in \mathbb{C}\colon |z, \gamma(t)| < \varepsilon \text{for en } t \in [a,b]\}$$

er inneholdt i Ω.

[1] Mer generelt sies en funksjon f å være *Lipschitzkontinuerlig* (av og til sier vi bare Lipschitz) dersom det finnes en konstant L slik at $|f(z) - f(w)| \le L|z-w|$ for alle z og w. En slik funksjon er også uniformt kontinuerlig: I definisjonen kan du velge $\delta = \varepsilon/L$.