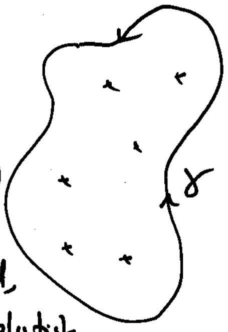
Residueteori oppsummert

"Residueteori" er ikke stort mer enn et antall "lure triks" for å beregne integraler ved hjelp av residueteoremet.

Residueteoremet:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f,z)$$



Forutsatt: γ enkel, lukket, positivt orientert, f analytisk på og innenfor γ med unntak av et endelig antall singulariteter innenfor γ. Summen er over disse singularitetene.

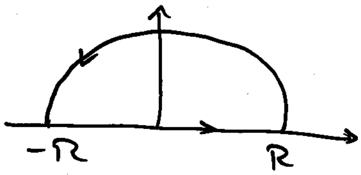
Integraler som involverer trigonometriske funksjoner kan ofte skrives på formen $\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta})\,d\theta$.

Parametriser enhetssirkelen ved $z=e^{i\theta}$, som gir $dz = ie^{i\theta}d\theta$, dvs $d\theta = \frac{dz}{iz}$

slik at $$\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta})\,d\theta = -i\int_{C_1(0)} \frac{G(z)}{z}\,dz = 2\pi \sum \mathrm{Res}\left(\frac{G(z)}{z}\right).$$

(NB! Ikke pugg formelen, men lær fremgangsmåten.)

Rasjonale funksjoner $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p og q polynomer, $\deg q \geq 2 + \deg p$:



Integrasjon rundt konturen og $R\to\infty$ leder til

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}(f,z)$$

- Forutsatt at f ikke har noen poler på den reelle aksen.

Produkt av rasjonale og trigonometriske:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}(f(z)e^{isz}, z)$$

forutsatt at f er analytisk på den reelle halvaksen og i øvre halvplan, unntatt et endelig antall singulariteter, og $f(z)\to 0$ når $z\to\infty$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$.
(Jordans lemma sier at da vil integralet over sirkelbuen gitt ved $z=Re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq\pi$ forsvinne i grensen når $R\to\infty$).