Løsning på oppgave 2.10: 4 i Perko

Ubegrunnede påstander i løsningen nedenfor kan rettferdiggjøres med Teorem 4 i avsnitt 2.10 og bemerkningen som følger umiddelbart etter bemerkningen.

Globale prosedyrer:

Disse prosedyrene burde kanskje dokumenteres bedre?
I hvert fall er p i hver prosedyre et navn som brukes til å indeksere hvilket punkt vi holder på med. Altså p=a,b,c,d,e,f. (Jeg var litt spent da jeg oppdaget at designet mitt gjorde at jeg kom til å bruk f som indeks i f, altså f[f], men det gikk bra på grunn av Maples evalueringsregler, som sier at et «nakent» navn hvis verdi er en prosedyre eller tabell normalt ikke blir evaluert.

```
> restart; with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

Prosedyren settsys brukes til å definere høyresiden i et system. Den regner ut den deriverte og finner de kritiske punktene.

```
> settsys:=proc(p,dotx,doty)
    global f, Df, nullpkt;
    f[p]:=[dotx,doty];
    Df[p]:=transpose(matrix(2,2,[diff(f[p],x),diff(f[p],y)]));
    nullpkt[p]:=[solve({op(f[p])},{x,y})];
    print(evaln(f[p])=f[p]);
    print(evaln(Df[p])=eval(Df[p]));
    print(evaln(nullpkt[p])=nullpkt[p]);
  end:
```

Prosedyren sjekk sjekker det n'te kritiske punktet til et system: Den regner ut den deriverte og dens egenverdier. Men konklusjonen (det vil si klassifiseringen av det kritiske punktet) overlates til brukeren.

```
> sjekk:=proc(p,n)
    local A, subskrit, egenverdier;
    global Df, nullpkt;
    subskrit:=unapply('subs'(nullpkt[p][n],z),z);
    A:=map(subskrit,Df[p]);
    egenverdier:=eigenvals(A);

  print(nullpkt[p][n],Df[p]=eval(A),`egenverdier:`,egenverdier)
  ;
  end:
```

Prosedyren sjekkliste tar en liste av indekser og kjører sjekk for hver indeks i listen. Dette er bare for å spare litt skriving.

```
> sjekkliste:=proc(p,l)
    local i;
    for i from 1 to nops(l) do
      sjekk(p,l[i]);
    od;
  end:
```

Punkt (a)

```
> settsys(a,x-x*y,y-x^2);
```

$$f_a = [x - x\,y,\ y - x^2]$$

$$Df_a = \begin{bmatrix} 1-y & -x \\ -2\,x & 1 \end{bmatrix}$$

$$nullpkt_a = [\{y=0, x=0\}, \{y=1, x=1\}, \{y=1, x=-1\}]$$

```
> sjekkliste(a,[1,2,3]);
```

$$\{y=0, x=0\}, Df_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, egenverdier:, 1, 1$$

$$\{y=1, x=1\}, Df_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, egenverdier:, -1, 2$$

$$\{y=1, x=-1\}, Df_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, egenverdier:, -1, 2$$

Dette gir en ustabil, proper node i origo og to sadelpunkter.

Punkt (b)

```
> settsys(b,-4*y+2*x*y-8,4*y^2-x^2);
```

$$f_b = [-4\,y + 2\,x\,y - 8,\ 4\,y^2 - x^2]$$

$$Df_b = \begin{bmatrix} 2\,y & -4+2\,x \\ -2\,x & 8\,y \end{bmatrix}$$

$$nullpkt_b = [\{y = \mathrm{RootOf}(\_Z + \_Z^2 + 2), x = -2\,\mathrm{RootOf}(\_Z + \_Z^2 + 2)\}, \{y=-1, x=-2\}, \{y=2, x=4\}]$$

```
> sjekkliste(b,[2,3]);
```
(hopper over den første roten fordi den ikke er reell)

$$\{y=-1, x=-2\}, Df_b = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, egenverdier:, -5 + I\sqrt{23}, -5 - I\sqrt{23}$$

$$\{y=2, x=4\}, Df_b = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}, egenverdier:, 8, 12$$

Her finner vi et stabilt fokus og en ustabil node.

Punkt (c)

```
> settsys(c,2*x-2*x*y,2*y-x^2+y^2);
```

$$f_c = [2\,x - 2\,x\,y,\ 2\,y - x^2 + y^2]$$

$$Df_c = \begin{bmatrix} 2-2\,y & -2\,x \\ -2\,x & 2+2\,y \end{bmatrix}$$

$$nullpkt_c = [\{y=0, x=0\}, \{y=-2, x=0\}, \{y=1, x=\mathrm{RootOf}(-3 + \_Z^2)\}]$$

```
> sjekkliste(c,[1,2,3]);
```
(RootOf-uttrykket her er ikke noe annet enn kvadratroten av 3)

$$\{y=0, x=0\}, Df_c = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, egenverdier:, 2, 2$$

$$\{ y = -2, x = 0 \}, Df_c = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 6, -2$$

$$\{ y = 1, x = \mathrm{RootOf}(-3 + \_Z^2) \}, Df_c = \begin{bmatrix} 0 & -2\,\mathrm{RootOf}(-3 + \_Z^2) \\ -2\,\mathrm{RootOf}(-3 + \_Z^2) & 4 \end{bmatrix},$$

$$\textit{egenverdier:}, -2, 6$$

Dette gir en ustabil, proper node i origo og to sadelpunkter.

Punkt (d)

```
> settsys(d,-x^2-y^2+1,2*x);
```

$$f_d = [-x^2 - y^2 + 1, 2\,x]$$

$$Df_d = \begin{bmatrix} -2\,x & -2\,y \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$nullpkt_d = [\{ y = 1, x = 0 \}, \{ y = -1, x = 0 \}]$$

```
> sjekkliste(d,[1,2]);
```

$$\{ y = 1, x = 0 \}, Df_d = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 2\,I, -2\,I$$

$$\{ y = -1, x = 0 \}, Df_d = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 2, -2$$

Det første kritiske punktet her blir et senter for lineariseringen, og da kan «alt skje». Det andre kritiske punktet er ikke noe problem; det er et sadelpunkt.
Men hva kan vi gjøre med det kritiske punktet i (x,y)=(0,1)? Først bytter vi ut y med y+1 slik at det kritiske punktet havner i origo. Den nye høyresiden blir slik:

```
> f[d1]:=map(expand,subs(y=y+1,f[d]));
```

$$f_{d1} := [-x^2 - y^2 - 2\,y, 2\,x]$$

Noen forsøk på å finne en enkel Liapunov-funksjon førte ikke frem. Derimot kan vi se at systemet er symmetrisk om y-aksen i den forstand at det er invariant om vi erstatter x med -x og t med -t. Ved Teorem 6 i avsnitt 2.10 er da (0,1) et senter for systemet.

Punkt (e)

```
> settsys(e,-x^2-y^2+1,2*x*y);
```

$$f_e = [-x^2 - y^2 + 1, 2\,x\,y]$$

$$Df_e = \begin{bmatrix} -2\,x & -2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}$$

$$nullpkt_e = [\{ y = 1, x = 0 \}, \{ y = -1, x = 0 \}, \{ y = 0, x = 1 \}, \{ y = 0, x = -1 \}]$$

```
> sjekkliste(e,[1,2,3,4]);
```

$$\{ y = 1, x = 0 \}, Df_e = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 2\,I, -2\,I$$

$$\{ y = -1, x = 0 \}, Df_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 2\,I, -2\,I$$

$$\{ y = 0, x = 1 \}, Df_e = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, -2, 2$$

$$\{ y = 0, x = -1 \}, Df_e = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 2, -2$$

Her finner vi først to kritiske punkter som er sentre for lineariseringen, mens de to siste er sadelpunkter. Vi prøver å håndtere sentrene på samme måte som i punkt (d):

```
> f[e1]:=map(expand,subs(y=y+1,f[e]));
  f[e2]:=map(expand,subs(y=y-1,f[e]));
```

$$f_{e1} := [-x^2 - y^2 - 2\,y, 2\,x\,y + 2\,x]$$

$$f_{e2} := [-x^2 + 2\,y - y^2, -2\,x + 2\,x\,y]$$

Igjen blir vi reddet av symmetrien. Bytter vi ut x med -x og t med -t ser vi at systemet er uforandret, og vi får altså virkelig to sentre for systemet, ikke bare for lineariseringen.

Punkt (f)

```
> settsys(f,x^2-y^2-1,2*y);
```

$$f_f = [x^2 - y^2 - 1, 2\,y]$$

$$Df_f = \begin{bmatrix} 2\,x & -2\,y \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textit{nullpkt}_f = [\{ y = 0, x = 1 \}, \{ y = 0, x = -1 \}]$$

```
> sjekkliste(f,[1,2]);
```

$$\{ y = 0, x = 1 \}, Df_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, 2, 2$$

$$\{ y = 0, x = -1 \}, Df_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \textit{egenverdier:}, -2, 2$$

Og her var det ingen problemer: Først en ustabil proper node, så et sadelpunkt.