75045 Dynamiske systemer

Oppgavesett #1 — løsningsforslag

1.2: 3. (Oppgavenumrene henviser til Perkos bok (1. eller 2. utgave). Dette er altså oppgave 3 i avsnitt 1.2.)

(a) $\ddot{x} + \dot{x} = 2x = 0$ skrives om med $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$ til

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

vi finner $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 1/2)^2 - 9/4 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$.

For å komme videre skal vi, etter «standardoppskriften», finne egenvektorene til de to egenverdiene -2 og 1. Men for en 2×2–matrise er det gjerne mye kvikkere å benytte at vi allerede vet at $B = A - \lambda_1 I$ har rang 1 (om den ikke er null, da), og derfor må B^2 være et multiplum av B (du kan overbevise deg om dette ved å betrakte nullrom og rekkevidde til både B og B^2).

Vi betrakter med andre ord

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = -3(A - I)$$

slik at vi skriver $A = I + B$ der $B^2 = -3B$, som gir $B^k = (-3)^{k-1}B$ for $k \geq 0$ (ved induksjon — men merk at tilfellet $k = 0$ gir det avvikende resultatet $B^0 = I$). Vi har dermed

$$e^{tA} = e^t e^{tB} = e^t \Big(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1} t^k}{k!} B \Big) = e^t \Big(I + \frac{e^{-3t} - 1}{-3} B \Big) = \frac{e^t}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-2t}}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Den generelle løsningen blir på formen $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t}$.

(b) $\ddot{x} + x = 0$ gir, som ovenfor med $x_1 = x$ og $x_2 = \dot{x}$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

som er enda enklere fordi $A^2 = -I$ slik at

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} I + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!} A = (\cos t) I + (\sin t) A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

og den generelle løsningen blir på formen $x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$, som vi alle visste utmerket godt på forhånd.

(c) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$ skrives om som før med $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ og $x_3 = \ddot{x}$ til

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

som gir oss $\det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2)$ og altså egenverdier ± 1 og -2. Den generelle løsningen skal bli på formen $x = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{-2t}$. Jeg er for lat til å bestemme egenvektorene og dermed et uttrykk for e^{tA}. Men det ser enklere ut å løse med hensyn på α, β og γ gitt initialdata for $x_1(0) = x(0)$, $x_2(0) = \dot{x}(0)$ og $x_3(0) = \ddot{x}(0)$ og så få et uttrykk for e^{tA} bakveien fra dette?

Jeg kan ikke riktig motstå fristelsen til å generalisere litt fra disse tre punktene: Ligningen $x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{x} + c_0 x = 0$ kan skrives om ved hjelp av $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$ til formen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

og det viser seg at $\det(\lambda I - A = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$, og som du kanskje gjenkjenner som det karakteristiske polynomet til den opprinnelige differensialligningen fra den elementære teorien for lineære differensialligninger med konstante koeffisienter. Slik sett er teorien for lineære systemer $\dot{x} = Ax$ ikke stort mer enn en likefrem generalisering.

1.2: 6. Vi har jo en eksplisitt formel $\varphi(t, x_0) = e^{tA}x_0$ som åpenbart er en kontinuerlig funksjon av x_0 (alle lineæravbildninger mellom rom av typen $\mathbb{R}^n$ er kontinuerlige).

Bemerk at om vi tegner opp hele «foroverbanen» $\{\varphi(t, x_0) : t \geq 0\}$ og varier x_0 behøver ikke bildet variere kontinuerlig med x_0, trass i kontinuiteten vi nettopp har vist. For et enkelt eksempel, betrakt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

og la $x_0 = (1, v)$. For $v > 0$ vil $x_2 \to \infty$ når $t \to \infty$, men for $v < 0$ vil $x_2 \to -\infty$, slik at det skjer en plutselig endring i den *asymptotiske oppførselen* til løsningen i det x_0 passerer x_1–aksen. (I begge tilfeller vil $x_1 \to 0$, og banen følger hyperbelen $x_1x_2 = v$.)

1.3: 3. Ulikheten $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ anvendt på T og T^{-1} gir uten videre $1 \leq \|T\|\|T^{-1}\|$ og så er det bare å dividere med $\|T\|$ for å få den ønskede ulikheten.

1.3: 4. Skriv $S = I - T$. Antagelsen gir $\|S\| < 1$ og dermed

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|S^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|S\|^k < \infty$$

og det følger at $R = \sum_{k=0}^{\infty} S^k$ konvergerer absolutt. Multiplikasjon med S gir

$$RS = \sum_{k=0}^{\infty} S^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} S^k = R - I$$

hvorav $R(I - S) = I$, med andre ord $RT = I$.

1.3: 5. Punkt (a) er jo triviell, og de neste tre tok jeg ved hjelp av samme trick som i **1.2: 3a** — altså skrive $A = \lambda I + B$ der λ er en egenverdi for A og utnytte at da blir $B^2 = \beta B$ for en passende β som jeg regner ut ved simpelthen å kvadrere B. Dette gir

$$e^{tA} = e^{\lambda t}e^{tB} = e^{\lambda t}\Big(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{k-1}t^k}{k!}B\Big) = e^{\lambda t}\Big(I + \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta}B\Big)$$

I oppgaven bruker vi dette bare for $t = 1$, og jeg fikk disse resultatene:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{bmatrix}; \quad \text{(b)}\ e\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)}\ e\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)}\ e^2\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + e^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(i (c) ble $\beta = 0$, som gir $e^B = I + B$ kort og godt). I (e) er det et par ikke-reelle egenverdier $2 \pm i$. Det er greiest å skrive $A = 2I + B$ der $B^2 = -I$, og e^B kan finnes ved å sette inn $t = -1$ i løsningen av **1.2: 3b**. I (f) utnytter jeg $A^2 = I$ til å skrive

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!}I + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!}A = (\cosh 1)I + (\sinh 1)A$$

og vi har altså løsningene

$$\text{(e) } e^2 \begin{bmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(f) } \begin{bmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{bmatrix}$$

1.3: 8. Vi vet at vi må velge to matriser som ikke kommuterer. Det enkleste eksemplet jeg kan komme på ser slik ut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir

$$e^A = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^A e^B = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{A+B} = \begin{bmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.5: 9. Jeg har nå for vane å gjøre ting på min egen måte, og heller enn å følge oppskriften i oppgaven foretrekker jeg å derivere de to ligningene $x_1 = r\cos\theta$ og $x_2 = r\sin\theta$ med hensyn på t, som gir

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

hvorav

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

og det gir umiddelbart formlene for $\dot{r}$ og $\dot{\theta}$ oppgitt i oppgaven. At det gitte systemet da leder til $\dot{r} = ar$ og $\dot{\theta} = b$ ser man ved innsetting. Løsningen med initialdata $r(0) = r_0$ og $\theta(0) = \theta_0$ er $r(t) = r_0 e^{at}$ og $\theta(t) = \theta_0 + bt$.

1.9: 1. Generelt har vi et hyperbolsk system akkurat når $E^c = \{0\}$.

(a) E^s er x_2-aksen og E_u er x_1-aksen mens $E^c = \{0\}$.

(b) $E^s = E^u = \{0\}$ og $E^c = \mathbb{R}^2$.

(c) $E^u = \mathbb{R}^2$ og $E^s = E^c = \{0\}$.

(d) E^s er x_1-aksen og E^u er utspent av $(1, 1)$, altså gitt ved $x_1 = x_2$. $E^c = \{0\}$.

(e) E^u er x_1-aksen og E^s er utspent av $(-1, 1)$, altså gitt ved $x_1 + x_2 = 0$. $E^c = \{0\}$.

(f) E^u er x_1-aksen og E^s er utspent av $(-1, 1)$, altså gitt ved $x_1 + x_2 = 0$. $E^c = \{0\}$.

(g) E^c er x_1-aksen og E^s er x_2-aksen, mens $E^u = \{0\}$.

(h) $E^s = E^u = \{0\}$ og $E^c = \mathbb{R}^2$.

(i) $E^s = \mathbb{R}^2$ og $E^u = E^c = \{0\}$.

(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

(g) (h) (i)

Oppgaver #2 — for neste uke

2.1: 1, 5 og **2.2: 1, 2, 6**.