75045 Dynamiske systemer

Oppgavesett #2 — løsningsforslag

2.1: 1. Oppgaven inneholder to funksjoner som begge heter f. Jeg døper om den andre til g for å unngå forvirring.

(a) Den deriverte av en funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i et punkt x er egentlig en lineæravbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, men i praksis er den greieste representasjonen av en slik lineæravbildning den tilhørende matrisen. Søylene i denne matrisen er de partiellderiverte av funksjonen, som gir

$$\mathrm{D}f(x) = \begin{bmatrix} 1+x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1 & -1+2x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D}g(x) = \begin{bmatrix} 1+x_2^2+x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ -1+x_2x_3 & 1-x_3+x_1x_3 & -x_2+x_1x_2 \\ -2x_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $f(x) = 0$ gir for første komponent $x_1(1+x_2^2) = 0$ og derfor $x_1 = 0$. Innsatt i annen komponent får vi da $-x_2 + x_2^2 = 0$, så $x_2 \in \{0, 1\}$. Da er det bare å sette inn i svaret fra (a):

$$\mathrm{D}f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D}f(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Poenget her, som kanskje ikke er så klart fra oppgaven, er at de to likevektspunktene blir henholdsvis et sadelpunkt og en ustabil node. Om vi tar Hartman–Grobmans teorem på forskudd vet vi at banene til $\dot{x} = f(x)$ ligner på banene til det lineære systemet $\dot{x} = Ax$ med $A = Df(x_0)$ i nærheten av hvert stasjonære punkt x_0 (dvs der $f(x_0) = 0$.))

$g(x) = 0$ gir oss likedan $x_1(1 + x_2^2 + x_3^2) = 0$ for første komponent, slik at $x_1 = 0$. Innsatt i tredje komponent leder det til $x_2 + x_3 = 0$, og $x_1 = 0$, $x_3 = -x_2$ innsatt i annen komponent gir $x_2 + x_2^2 = 0$ med resultat $x_2 \in \{0, -1\}$. De deriverte blir

$$\mathrm{D}g(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D}g(0,-1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Den andrederiverte er litt mer tricky. Siden $\mathrm{D}f\colon \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2)$ blir $\mathrm{D}^2 f$ en funksjon $\mathrm{D}^2 f\colon \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2))$. Notasjonen er slik at om E og F er vektorrom er $L(E,F)$ rommet av alle lineæravbildninger $E \to F$, og $L(E)$ er kort for $L(E,E)$. Generelt, om $F\colon \mathbb{R}^2 \to E$ er en avbildning inn i et (endeligdimensjonalt) vektorrom E, er $\mathrm{D}F\colon \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, E)$. For hver $x \in \mathbb{R}^2$ kjenner vi lineæravbildningen $\mathrm{D}F(x)$ om vi kjenner dens virkning på vektorene i en basis, for eksempel den naturlige basisen $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Men $\mathrm{D}F(x)e_j = \partial F/\partial x_j$. Anvender vi dette på $F = \mathrm{D}f$ finner vi

$$\mathrm{D}^2 f(x)e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D}^2 f(x)e_2 = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

og derfor

$$\mathrm{D}^2 f(x)u = u_1 \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

En annen måte å si det på er denne: En lineæravbildning $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2)$ gir en *bilineær*[1] avbildning $\psi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved $\psi(u,v) = \varphi(u)(v)$, og enhver bilineær avbildning ψ definerer en lineæravbildning φ ved samme formel. I matematikken er det vanlig å *identifisere* isomorfe objekter, det vil si late som de er samme objekt.[2] Vi betrakter derfor $\mathrm{D}^2 f(x)$ som en bilineær avbildning såvel som en lineær avbildning, og finner

$$\mathrm{D}^2 f(x)(u,v) = \mathrm{D}^2 f(x)(u)(v) = \left(u_1 \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2u_1v_2 + 2x_2u_2v_1 + 2x_1u_2v_2 \\ 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \end{bmatrix}.$$

[1] En bilineær avbildning er definert ved kravene $\psi(au,v) = \psi(u,av) = a\psi(u,v)$, $\psi(u+v,w) = \psi(u,w) + \psi(v,w)$, $\psi(u,v+w) = \psi(u,v) + \psi(u,w)$ for alle skalarer a og vektorer u, v og w.

[2] Åpenbart en farlig praksis om den ikke utføres med forsiktighet, men veldig nyttig fordi den sparer notasjon og begreper.

Legg merke til at dette uttrykket er symmetrisk: $\mathrm{D}^2 f(u,v) = \mathrm{D}^2 f(v,u)$. Dette gjelder generelt når f er en C^2-funksjon, og er ikke noe annet enn det faktum at blandede partiellderiverte er like. (Oppgaven ba om dette svaret for $x_1 = 0$ og $x_2 = 1$.)

2.1: 5. $\dot{x} = 1/(2x)$ leder til $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ som gir $x^2 = t - t_0$. Setter vi inn initialdataene $x = 1$ når $t = 1$ finner vi $t_0 = 0$. Ut fra initialdataene ser vi også at vi må velge den positive kvadratroten, så $x(t) = \sqrt{t}$. Tydligvis gir det $\dot{x}(t) = 1/(2\sqrt{t})$ som går mot ∞ når $t \searrow 0$, tross at x konvergerer (mot 0). Det er høyresiden i differensialligningen som «eksploderer» i grensen.

2.2: 1. Picarditerasjon rett frem «etter nesen» gir

$$u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = 1 + t, \quad u_2(t) = 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad u_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7.$$

(Vi ser et mønster her: u_k blir et polynom av grad $2^k - 1$ hvor alle koeffisientene foran ledd av grad $\leq k$ blir 1. I grensen virker det ikke usannsynlig at dette gir $\sum_{j=0}^{\infty} t^k = 1/(1-t)$ som løser ligningen, i hvert fall for $|t| < 1$. Et kjapt eksperiment med Maple (vedlagt) peker i samme retning.)

2.2: 2. For $\dot{x} = Ax$ med $x(0) = x_0$ gir Picard-iterasjon med $u_0(t) = x_0$:

$$u_1(t) = x_0 + \int_0^t Ax_0\,\mathrm{d}s = (I + tA)x_0,$$

$$u_2(t) = x_0 + \int_0^t A(I + sA)x_0\,\mathrm{d}s = \Big(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\Big)x_0$$

og det virker ikke urimelig å gjette at

$$u_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}A^k$$

som så lett vises ved induksjon. Men dette er jo k–te delsum i rekken for $e^{tA}x_0$, og konvergerer mot dette for alle t.

2.2: 6. Anta først $\dot{x}(t) = f(x(t))$ og $x(0) = x_0$. Siden x er deriverbar er den spesielt kontinuerlig, og dermed er $f(x(t))$ en kontinuerlig funksjon av t, og ligningen gir at x er kontinuerlig deriverbar. Spesielt kan vi da anvende den av integralregningens fundamentalsatser som sier at

$$\int_0^t \dot{x}(s)\,\mathrm{d}s = x(t) - x(0).$$

Vi setter inn $\dot{x} = f(x)$ og $x(0) = x_0$, omarrangerer og får

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s$$

som vi skulle.

Omvendt, om x oppfyller dette og er kontinuerlig, er også $f(x(t))$ en kontinuerlig funksjon av t, og vi kan anvende den andre av integralregningens fundamentalsatser:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s = f(x(t))$$

som umiddelbart gir $\dot{x} = f(x)$. Initialbetingelsen $x(0) = x_0$ får man ved enkel innsetting.

Rettelser til forrige løsningsforslag:

1.3: 5(d). Jeg uteglemte eksponenten i første ledd i svaret, som skal være

$$e^2\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + e^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.9: 1(g). Banene skal være vertikale linjer ($x =$ konstant), ikke horisontale som jeg tegnet det.

Oppgaver #3 — for neste uke

2.3: 2, 5, 6; 2.4: 3; 2.5: 5; 2.6: 1,2