# 75045 Dynamiske systemer

## *Oppgavesett #3 — løsningsforslag*

**2.3:2.**

(a)

Vi løser $\dot{x} = f(x)$ med initialdata $x(0) = y$. Vi skal altså ha $\dot{x}_1 = -x_1$ som gir $x_1 = y_1 e^{-t}$ med de gitte initialdataene. Så blir $\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 = -x_2 + y_1^2 e^{-2t}$, med generell løsning $x_2 = Ae^{-t} - y_1^2 e^{-2t}$. Initialdataene gir $A = y_2 + y_1^2$. Til sist blir $\dot{x}_3 = x_3 + x_1^2 = x_3 + y_1^2 e^{-2t}$ med generell løsning $x_3 = Be^t - (y_1^2/3)e^{-2t}$. Intialdataene gir $B = y_3 + y_1^2/3$. Vi ender altså med

$$u(t,y) = \Big[y_1 e^{-t}, \quad (y_2 + y_1^2)e^{-t} - y_1^2 e^{-2t}, \quad \Big(y_3 + \frac{y_1^2}{3}\Big)e^t - \frac{y_1^2}{3}e^{-2t}\Big]^{\mathrm{T}}$$

og dette gir

$$\Phi(t,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ -2y_1 e^{-2t} + 2y_1 e^{-t} & e^{-t} & 0 \\ -\dfrac{2y_1}{3}e^{-2t} + \dfrac{2y_1}{3}e^t & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

og dermed

$$\dot{\Phi} = \begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 & 0 \\ 4y_1 e^{-2t} - 2y_1 e^{-t} & e^{-t} & 0 \\ \dfrac{4y_1}{3}e^{-2t} + \dfrac{2y_1}{3}e^t & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Videre er

$$Df(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så

$$Df\big(u(t,y)\big)\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2y_1 e^{-t} & -1 & 0 \\ 2y_1 e^{-t} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ -2y_1 e^{-2t} + 2y_1 e^{-t} & e^{-t} & 0 \\ -\dfrac{2y_1}{3}e^{-2t} + \dfrac{2y_1}{3}e^t & 0 & e^t \end{bmatrix} = \Phi(t,y)$$

etter litt strev.

(b)

Samme opplegg som i forrige punkt. Vi finner $\dot{x}_1 = x_1^2$ som, etter at vi har løst og satt inn $x_1(0) = y_1$, gir $x_1 = y_1/(1 - y_1 t)$. Videre blir $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^{-1} = x_2 + y_1^{-1} - t$ som kanskje lettest løses ved bruk av en integrerende faktor $e^{-t}$, og gir $x_2 = t + 1 - y_1^{-1} + (y_2 - 1 + y_1^{-1})e^t$. Oppsummert:

$$u(t,x) = \begin{bmatrix} \dfrac{y_1}{1 - y_1 t} \\ t + 1 - \dfrac{1}{y_1} + \Big(y_2 - 1 + \dfrac{1}{y_1}\Big)e^t \end{bmatrix}, \quad \Phi = \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1 - y_1 t)^2} & 0 \\ \dfrac{1 - e^t}{y_1^2} & e^t \end{bmatrix}$$

Vi finner videre

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ -\dfrac{1}{x_1^2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\Phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{2y_1}{(1 - y_1 t)^3} & 0 \\ -\dfrac{e^t}{y_1^2} & e^t \end{bmatrix}$$

og endelig

$$Df\big(u(t,x)\big)\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{2y_1}{1 - y_1 t} & 0 \\ -\dfrac{(1 - y_1 t)^2}{y_1^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1 - y_1 t)^2} & 0 \\ \dfrac{1 - e^t}{y_1^2} & e^t \end{bmatrix} = \dot{\Phi}.$$

**2.3: 5.** Liouville's teorem, som er nevnt i oppgaven, kan generelt skrives som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \det \Phi(t) = \operatorname{tr}\big(\dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1}\big)$$

så lenge $\Phi$ er invertibel.[1] Dersom $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ blir høyresiden lik $\operatorname{tr} A(t)$. Dersom i tillegg $\Phi(0) = I$ kan dette integreres til å gi $\ln\det\Phi(t) = \int_0^t \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s$, og dermed blir

$$\det\Phi = \exp\int_0^t \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s$$

som det er påstått i oppgaven.

Jeg reformulerer like godt oppgaven til å benytte strømmen: $\varphi_t(x_0) = u(t, x_0)$ er løsningen til $\dot{x} = f(x)$ med startverdi $x_0$ etter tiden $t$. Jeg bruker notasjonen $\mathrm{D}\varphi_t$ for den deriverte til funksjonen $\varphi_t$, det som oppgaven kaller $\partial u(t,y)/\partial y$. Vi vet at den deriverte oppfyller ligningen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{D}\varphi_t(x_0) = \mathrm{D}f\big(\varphi_t(x_0)\big)\mathrm{D}\varphi_t(x_0)$$

som nettopp er på formen $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, og Liouvilles teorem leder til

$$\det\mathrm{D}\varphi_t(x_0) = \exp\int_0^t \operatorname{tr}\mathrm{D}f\big(\varphi_s(x_0)\big)\,\mathrm{d}s = \exp\int_0^t \operatorname{div} f\big(\varphi_s(x_0)\big)\,\mathrm{d}s.$$

$\det\mathrm{D}\varphi_t(x_0)$ måler hvordan volumet av et lite område nær $x_0$ endres når det flyttes med strømmen en tid $t$ (dette er variabelskifteformelen for multiple integraler). Når determinanten er større enn 1, utvides volumet med en tilsvarende faktor, og når den er mindre enn 1, krympes volumet. Vi ser nå at det er fortegnet til $\operatorname{div} f$ langs banen fra $x_0$ til $\varphi_t(x_0)$ som bestemmer om det blir utvidelse eller krymping. Det er dette som gir opphav til navnet «divergens».

**2.3: 6.** Dette er en nokså direkte konsekvens av forrige oppgave, og ikke minst kommentaren til slutt. La $R_1 = \varphi_t(R_0)$. Siden $\varphi_t$ er en diffeomorfi (den er deriverbar og har en deriverbar invers), kan vi skifte variabel i integralet for volumet til $R_1$:

$$V(R_1) = \int_{R_1} \mathrm{d}y$$

(hvor dette er kort for et multippelt integral og $\mathrm{d}y$ er kort for $\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$) ved å sette $y = \varphi_t(x)$ og la $x$ variere over $R_0$, med resultat

$$V(R_1) = \int_{R_0} |\det\mathrm{D}\varphi_t(x)|\,\mathrm{d}x$$

men hvis $\operatorname{div} f = 0$ overalt viser formelen i forrige oppgave at $\det\mathrm{D}\varphi_t(x) = 1$ overalt, og integranden over blir 1 og dermed er $V(R_1) = V(R_0)$. Altså er strømmen volumbevarende dersom $\operatorname{div} f = 0$.

Omvendt, om $\operatorname{div} f \neq 0$ i minst ett punkt kan vi finne en åpen, ikketom mengde $U_0$ hvor $\operatorname{div} f > 0$ (eller en hvor $\operatorname{div} f < 0$, men det behandles på samme vis). La $R_0$ være en åpen ikketom delmengde av $U_0$ slik at $\overline{R}_0$ er kompakt og inneholdt i $U_0$. Da finnes $\delta > 0$ slik at $\varphi_t(R_0) \subseteq U_0$ når $|t| < \delta$. For en slik $t > 0$ finner vi fra formelen i forrige oppgave at $\det\mathrm{D}\varphi_t > 1$ i $R_0$, og integralformelen i forrige avsnitt gir dermed $V(R_1) > V(R_0)$ slik at $\varphi_t$ ikke er volumbevarende.

**2.4: 3.** Om $x(t)$ ikke har noen grense når $t \nearrow \beta$, så finnes $t_1 < t_2 < \dots$ med $t_j \to \beta$ slik at $x(t_j)$ ikke konvergerer når $j \to \infty$. Da er ikke denne følgen Cauchy, og det finnes derfor en $\varepsilon > 0$ slik at for hver $N$ finnes $j, k \geq N$ med $|x(t_j) - x(t_k)| \geq \varepsilon$. Da er enten $|x(t_j) - x(t_N)| \geq \varepsilon/2$ eller $|x(t_k) - x(t_N)| \geq \varepsilon/2$ slik at det for hver $N$ finnes $j > N$ med $|x(t_j) - x(t_N)| \geq \varepsilon/2$.

Nå er det slik at den rette linje er den korteste vei mellom to punkter, slik at buelengden av $\Gamma_+$ fra $x(t_N)$ til $x(t_j)$ er minst like store som $|x(t_j) - x(t_N)|$ og derfor $\geq \varepsilon/2$ for en passe $j$. La så $j_1$ være tilfeldig, og gitt $j_1, \dots, j_k$ velg $j_{k+1} > j_k$ slik at $|x(t_{j_{k+1}}) - x(t_{j_k})| \geq \varepsilon/2$. Buelengden av $\Gamma_+$ fra $x(t_{j_1})$ til $x(t_{j_{k+1}})$ blir altså minst $k\varepsilon/2$, som går mot uendelig når $k \to \infty$. Dermed er buelengden av $\Gamma_+$ uendelig.

En definisjon av buelengden til en kurve er faktisk supremum av alle summene $\sum_{j=1}^k |x_j - x_{j-1}|$ der $x_0, \dots, x_k$ er punkter som ligger etter hverandre på kurven. Denne definisjonen har den fordelen at kurven ikke trenger være stykkevis differensiabel, slik den vanlige definisjonen $\int_\alpha^\beta |\dot{x}|\,\mathrm{d}t$ krever.

[1] Jeg har skrevet en kort utledning av dette resultatet. Finnes på Websiden for kurset for de som er interessert.

**2.5: 5.** Differensialligningene $\dot{x} = f(x)$ med intialdata $x(0) = y$ blir i dette tilfellet $\dot{x}_1 = -x_1$, med løsning $x_1 = y_1 e^{-t}$, og $\dot{x}_2 = 2x_2 + x_1^2 = 2x_2 + y_1^2 e^{-2t}$. Denne siste har generell løsning $x_2 = Ae^{2t} - (y_1^2/4)e^{-2t}$, og initialdataene $x_2 = y_2$ for $t = 0$ gir $A = y_2 + y_1^2/4$. Alt i alt er altså

$$\varphi_t(y) = \begin{bmatrix} y_1 e^{-t} \\ \left(y_2 + \dfrac{y_1^2}{4}\right)e^{2t} - \dfrac{y_1^2}{4}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Om $y_2 + y_1^2/4 = 0$ blir

$$x_2 + \frac{x_1^2}{4} = \left(y_2 + \frac{y_1^2}{4}\right)e^{2t} - \frac{y_1^2}{4}e^{-2t} + \frac{(y_1 e^{-t})^2}{4} = \left(y_2 + \frac{y_1^2}{4}\right)e^{2t} = 0.$$

**2.6: 1, 2.** For disse to oppgavene har jeg tillatt meg å gripe til Maple (som jeg sikkert kunne gjort for flere av oppgavene ovenfor og). Resultatet er vedlagt. Jeg vil også gjøre Maple-regnearkene tilgjengelig på Web-siden for kurset.

---

**Rettelser til forrige løsningsforslag:**

**2.1: 1.** I fotnote nummer 1 på side 1 står $\psi(au, v) = \psi(u, av) = \psi(u, v)$, men det skulle vært $\psi(au, v) = \psi(u, av) = a\psi(u, v)$.

---

## *Oppgaver #4 — for neste uke*

**2.7: 1, 2, 3; 2.9: 4, 5, 7, 8; 2.10: 1.**