75045 Dynamiske systemer

Oppgavesett #4 — løsningsforslag

2.7: 1. Skriv systemet som

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}x_1x_2\\ -x_1^2\end{bmatrix}}_{F(x)}$$

hvor $F(x)$ er kvadratisk i (x_1, x_2). Vi finner raskt at A har egenverdiene -3 og 7 med egenvektorer henholdsvis $(3,-2)^{\mathrm{T}}$ og $(1,1)^{\mathrm{T}}$, slik at $AV = VB$ med

$$B = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Vårt system $\dot{x} = Ax + F(x)$ skrives om med $x = Vy$ til $V\dot{y} = AVy + F(Vy) = VBy + F(Vy)$, det vil si til $\dot{y} = By + G(y)$ der

$$G(y) = V^{-1}F(Vy) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix}3y_1 + y_2\\ -2y_1 + y_2\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3y_1^2 + 7y_1y_2 + 2y_2^2\\ -39y_1^2 - 16y_1y_2 - y_2^2\end{bmatrix}$$

(med litt hjelp fra Maple i avslutningen).

2.7: 2. Om vi følger bokas bevis for eksistensen av den stabile mangfoldigheten skal vi ha $u^{(0)}(t,a) = 0$ mens

$$u^{(j+1)}(t,a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u^{(j)}(s,a))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty V(t-s)G(u^{(j)}(s,a))\,\mathrm{d}s.$$

I dette tilfellet er

$$B = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix}0\\ x_1^2\end{bmatrix}, \quad U(t) = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad V(t) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & e^t\end{bmatrix}.$$

Men da er begge integralene i rekursjonsformelen over null i første komponent, slikt at

$$u_1^{(j+1)}(t,a) = a_1e^{-t}.$$

Annen komponent av rekursjonsformelen gir bare

$$u_2^{(j+1)}(t,a) = -\int_t^\infty e^{t-s}\big(u_1^{(j)}(s,a)\big)^2\,\mathrm{d}s.$$

For $j = 0$ gir dette bare $u_2^{(1)}(t,a) = 0$, mens for alle $j \geq 1$ gir det

$$u_2^{(j+1)}(t,a) = -\int_t^\infty e^{t-s}\big(a_1e^{-s}\big)^2\,\mathrm{d}s = -\frac{a_1^2}{3}e^{-2t}.$$

Oppsummert: $u^{(j)}(t,a)$ er uavhengig av j for $j \geq 2$, og konvergerer derfor trivielt mot grensen

$$u(t,a) = \begin{bmatrix}a_1e^{-t}\\ -\frac{a_1^2}{3}e^{-2t}\end{bmatrix} \quad \text{med } u(0,a) = \begin{bmatrix}a_1\\ -\frac{a_1^2}{3}\end{bmatrix}$$

når $j \to \infty$. Nå er det nettopp $u(0,a)$ som parametriserer den lokale stabile mangfoldigheten S, som altså har ligning $y_2 = -y_1^2/3$.

2.7: 3. $\dot{x}_1 = -x_1$ har generell løsning $x_1 = Ae^{-t}$. Dette kan vi sette inn i den andre ligningen $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2$ og få $\dot{x}_2 = x_2 + A^2e^{-2t}$, som har generell løsning $x_2 = Be^t - (A^2/4)e^{-2t}$.

Det er jo ganske opplagt at x_2-aksen ($x_1 = 0$) er invariant. Fra forrige punkt vet vi at kurven gitt ved $x_2 + x_1^2/3 = 0$ også bør være invariant, men det er ingen dum idé å sjekke dette eksplisitt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x_2 + \frac{x_1^2}{3}\Big) = \dot{x}_2 + \frac{2}{3}x_1\dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 - \frac{2}{3}x_1^2 = x_2 + \frac{x_1^2}{3}$$

slik at $u(t) = x_2 + x_1^2/3$ oppfyller $\dot{u} = u$. Men vi vet jo at da er $u(t) = 0$ for alle t dersom $u(t) = 0$ for en t. Se for øvrig en generalisering av dette i oppgave #5.1.

2.9: 4. Vi kan ta punktene (a) og (b) i en runde ved å skrive

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + \mu(x_1^2 + x_2^2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \mu(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{aligned}$$

der $\mu = -1$ i (a) og $\mu = 1$ i (b). Forsøker vi oss med Liapunov-funksjonen $V = x_1^2 + x_2^2$ finner vi kjapt

$$\dot{V} = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) = 2(-x_1x_2 + \mu(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 + x_1x_2\mu(x_1^2 + x_2^2)x_2^2) = 2\mu(x_1^2 + x_2^2)^2 \neq 0$$

med samme fortegn som μ for $(x_1, x_2) \neq 0$. Altså har vi asymptotisk stabilitet i (a) og ustabilitet i (b).
(c) Her er

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 \end{aligned}$$

som umiddelbart gir

$$\dot{V} = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) = 2(-x_1x_2 - x_1^2x_2 + x_1x_2 + x_1^2x_2) = 0.$$

Dette gir stabilitet, men ikke asymptotisk stabilitet (banene ligger på sirkler med sentrum i origo). Faktisk kan vi skrive

$$\dot{x}_1 = -(1 + x_1)x_2, \quad \dot{x}_2 = (1 + x_1)x_1$$

som bortsett fra den felles faktoren $1 + x_1$ er det samme systemet som $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (-x_2, x_1)$ med løsning $(x_1, x_2) = \big(A\cos(t-a), A\sin(t-a)\big)$. Faktoren $1 + x$ gjør at løsningene for de to systemen følger samme baner, men med forskjellig hastighet (og motsatt retning, når $x_1 < -1$).

2.9: 5. Alle systemene i denne oppgaven har et likevektspunkt i origo. I punktene (a–c) er dette likevektspunktet hyperbolsk, slik at det knapt er nødvendig med noen Liapunov-funksjon for å avgjøre stabilitet! (Hadde jeg oppdaget det tidligere, hadde jeg neppe gitt oppgaven.) I punkt (d) derimot er likevektspunktet ikkehyperbolsk: Det lineariserte systemet har et senter. Jeg har ikke funnet en Liapunovfunksjon for dette systemet, så vi får komme tilbake til dette etter påske.

2.9: 7. I oppgaven er f et like polynom og g et odde polynom, og

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s, \quad G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Spesielt er altså F et odde polynom og G et like polynom med $F(0) = G(0) = 0$, $F' = f$ og $G' = g$. Siden vi skal skrive om ligningen

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

til et system som blant annet inneholder ligningen $\dot{x}_2 - g(x_1)$ er det vel klart at vi burde sette $x_1 = x$ og forsøke å skrive $\ddot{x} + f(x)\dot{x}$ som en derivert. Men det er jo likefrem, siden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x) = F'(x)\dot{x} = f(x)\dot{x}.$$

Vi trenger altså bare definere $x_2 = \dot{x}_1 + F(x_1)$ for å få den ønskede ligningen $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 + f(x_1)\dot{x}_1 = -g(x_1)$ fra den gitte ligningen. Rydder vi opp, får vi Lienardsystemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1), \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1). \end{aligned}$$

Origo er et likevektspunkt fordi $F(0) = 0$ og $g(0) = 0$ (siden g er odde).

Dataene som er gitt antyder vel at vi skal se etter en Liapunovfunksjon. Det er veldig nærliggende å la $G(x_1)$ være inneholdt i denne, fordi vi har gitt at $G(x_1) > 0$ når $x_1 \neq 0$ er liten nok. Vi finner

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(x_1) = g(x_1)\dot{x}_1 = g(x_1)x_2 - g(x_1)F(x_1)$$

hvor vi har kontroll over det siste leddet, men ikke det første. Men vi har

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x_2^2}{2} = x_2\dot{x}_2 = -x_2 g(x_1)$$

og dermed ser vi at $V = G(x_1)+x_2^2/2$ skulle bli en brukbar Liapunovfunksjon med $\dot{V} = -g(x_1)F(x_1)$. Denne har den fordelen at $V > 0$ når $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ er liten nok, og vi har altså $\dot{V} = -g(x_1)F(x_1)$ som gir presis de stabilitetsegenskapene det ble spurt etter, rent bortsett fra at vi bar får $\dot{V} \gtreqless$, mens $\dot{V} \gtrless 0$ bare når $x_1 \neq 0$ ($\gtreqless$ står for enten $\geq$ eller $\leq$, og $\gtrless$ for enten $>$ eller $<$, avhengig av fortegnet til μ). At dette likevel gir asymptotisk (u)stabilitet krever et separat argument jeg vil komme tilbake til.

2.9: 8. van der Pol's ligning $\ddot{x} + \varepsilon(x^2-1)\dot{x} + x = 0$ er nettopp en ligning av denne typen, med $f(x) = \varepsilon(x^2-1)$ og $g(x) = x$. Dette gir $G(x) = x^2/2 > 0$ (for $x \neq 0$ og $F(x) = \varepsilon(x^3/3 - x)$ slik at $g(x)F(x) = \varepsilon(x^2/3-1)x^2 \neq 0$ med motsatt fortegn av ε, når $0 < |x| < \sqrt{3}$. For $\varepsilon > 0$ er altså origo et ustabilt likevektspunkt, og for $\varepsilon < 0$ er det stabilt.

Oppgaver #5 — over påske

#**5: 1.** Anta H er en reell C^1-funksjon slik at $DH(x)f(x) = g(x)H(x)$ der g er en reell kontinuerlig funksjon. Vis at da er punktmengden gitt ved $H(x) = 0$ invariant for systemet $\dot{x} = f(x)$. (Hint: Bruk Grönwall.)

#**5: 2.** Bevis teorem 6 i Perko avsnitt 2.10.

Perko 2.10: 4; 2.12: 1–4.