75045 Dynamiske systemer

Oppgavesett #4 — løsningsforslag (forts)

2.10: 1. For å konvertere til polarkoordinater bruker vi formlene

$$\dot r = \frac{x\dot x + y\dot y}{r}, \quad \dot\theta = \frac{x\dot y - y\dot x}{r^2}$$

og setter inn $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ etterpå.

(a) $\dot x = x - y$, $\dot y = x + y$ gir

$$\begin{aligned}\dot r &= \frac{x(x-y) + y(x+y)}{r} = r,\\ \dot\theta &= \frac{x(x+y) - y(x-y)}{r^2} = 1\end{aligned}$$

som umiddelbart forteller oss at vi har å gjøre med et ustabilt fokus. Dette kunne vi også sett direkte fra det linariserte systemet i dette tilfellet, siden det har egenverdiene $1 \pm i$.

(b) $\dot x = -y + xy^2$, $\dot y = x + y^3$ gir

$$\begin{aligned}\dot r &= \frac{x(-y+xy^2) + y(x+y^3)}{r} = \frac{x^2y^2 + y^4}{r} = \frac{r^2y^2}{r} = r^3\sin^2\theta,\\ \dot\theta &= \frac{x(x+y^3) - y(-y+xy^2)}{r^2} = 1\end{aligned}$$

som igjen gir et ustabilt fokus. Vi må egentlig argumentere litt grundigere for dette, fordi vi ikke har ulikheten $\dot r > 0$ oppfylt i en punktert omegn om origo. Men når t øker med 2π går $\varphi_t(x)$ en gang rundt origo (θ øker med 2π), og fordi $\dot r \geq 0$ alltid og $\dot r > 0$ i hvert fall en del av tiden må r ha økt i løpet av runden, og det følger at det ikke finnes lukkede baner for systemet. Dermed må origo være et fokus.

(c) $\dot x = -y + x^5$, $\dot y = x + y^5$ gir

$$\begin{aligned}\dot r &= \frac{x(-y+x^5) + y(x+y^5)}{r} = \frac{x^6 + y^6}{r} = r^5(\cos^6\theta + \sin^6\theta),\\ \dot\theta &= \frac{x(x+y^5) - y(-y+x^5)}{r^2} = \frac{x^2+y^2+xy^5-yx^5}{r^2} = 1 + r^4\sin\theta\cos\theta(\sin^4\theta - \cos^4\theta).\end{aligned}$$

Her er $\dot r > 0$ og $\dot\theta >$ konstant > 0 for små r, noe som igjen gir et ustabilt fokus.

Oppgavesett #5 — løsningsforslag

2.10:4.

(a,b) Vi har her $\dot x_1 = -x_2 + \mu(x_1^3 + x_1x_2^2)$, $\dot x_2 = x_1 + \mu(x_2^3 + x_2x_1^2)$ med $\mu = \pm 1$ ($\mu = -1$ i (a) og $mu = +1$ i (b)). Dette gir $\dot V = 2x_1\dot x_1 + 2x_2\dot x_2 = 2x_1\big(-x_2 + \mu(x_1^3 + x_1x_2^2)\big) + 2x_2\big(x_1 + \mu(x_2^3 + x_2x_1^2)\big) = 2\mu(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4) = 2\mu(x_1^2 + x_2^2)^2$ som umiddelbart løser begge punktene siden dette gir (a) $\dot V < 0$ når $\mu = -1$ og (b) $\dot V > 0$ når $\mu = +1$.

(c) Her er $\dot x_1 = -x_2 - x_1x_2$ og $\dot x_2 = x_1 + x_1^2$ som gir $\dot V = 2x_1(-x_2 - x_1x_2) + 2x_2(x_1 + x_1^2) = 0$. Banene er gitt ved $V =$ konstant, og er altså (deler av) sirkler med sentrum i origo. En bane kan bli bare en del av en sirkel dersom det ligger et likevektspunkt på sirkelen. I dette tilfellet krever det ikke mye regning å se at likevektspunktene er origo og alle punktene langs linjen $x_1 = -1$. Mens strømmen følger positiv omløpsretning rundt sirklene for $x_1 < 1$, følger de negativ omløpsretning for $x_1 > 1$.

Oppsummert er altså banene for dette systemet: Origo, alle sirkler med sentrum i origo og radius mindre enn 1, sirkelen med sentrum origo og radius 1 med punktet $(1, 0)$ tatt bort, de to sirkelbuene linjen $x_1 = 1$ deler sirkelen med radius r i når $r > 1$, og hvert punkt $(1, x_2)$.

2.12:1.
(a) Vi trenger å finne en funksjon H med

$$\frac{\partial H}{\partial y} = a_{11}x + a_{12}y + Ax^2 - 2Bxy + Cy^2,$$
$$\frac{\partial H}{\partial x} = -a_{21}x + a_{11}y^2 - Dx^2 + 2Axy - By^2.$$

Integrer den første relasjonen med hensyn på y og den andre med hensyn på x, og få

$$H = a_{11}xy + \frac{a_{12}}{2}y^2 + Ax^2y - Bxy^2 + \frac{C}{3}y^3 + F(x),$$
$$H = -\frac{a_{21}}{2}x^2 + a_{11}xy^2 - \frac{D}{3}x^3 + Ax^2y - Bxy^2 + G(y)$$

for passende funksjoner F og G. Vi ser at om begge formlene for H holder om vi setter

$$F(x) = -\frac{a_{21}}{2}x^2 - \frac{D}{3}x^3, \quad G(y) = \frac{a_{12}}{2}y^2 + \frac{C}{3}y^3$$

som gir

$$H(x,y) = -\frac{a_{21}}{2}x^2 + a_{11}xy + \frac{a_{12}}{2}y^2 - \frac{D}{3}x^3 + Ax^2y - Bxy^2 + \frac{C}{3}y^3.$$

(b) Om systemet er Hamiltonsk og vi skriver $f = (f_1, f_2)$ blir jo $f_1 = H_y$ og $f_2 = -H_x$ (hvor indeksene angir en partiell derivert), som gir $\operatorname{div} f = f_{1x} + f_{2y} = H_{yx} - H_{xy} = 0$ i hvert fall så lenge $H \in C^2$, siden blandede partiell-deriverte da er like.

Omvendingen holder generelt bare i et enkeltsammenhengende område: Gitt f med $\operatorname{div} f = 0$ søker vi en funksjon H slik at $\nabla H = g = (-f_2, f_1)$. Her vil vektorfeltet g oppfylle $g_{1y} = g_{2x}$ (siden $g_{2x} - g_{1y} = f_{1x} + f_{2y} = 0$), og i følge Greens teorem vil da linjeintegralet $\int_a^b g(z) \cdot \mathrm{d}z$ være uavhengig av veien så lenge vi holder oss innen et enkeltsammenhengende område. La $H(w) = \int_a^w g(z) \cdot \mathrm{d}z$.

2.12:2. Her er det snakk om et Newtonsk system, på formen

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -U'(x)$$

med $U(x) = x^2/2 - x^3/3$ og altså $H(x,y) = y^2/2 + U(x)$. De kritiske punktene er for $y = 0$ og $U'(x) = 0$, altså $x = 0$ eller $x = 1$. Siden $x = 0$ er et lokalt minimum for U og $x = 1$ et lokalt maksimum, blir $(0,0)$ et senter og $(1,0)$ en sadel.

2.12:3. Her blir $U'(x) = x - x^3$, som gir $U(x) = x^2/2 - x^4/4$ (her og i oppgaven foran er det greit å kaste bort integrasjonskonstanten, som likevel ikke har noen innvirkning på resultatet). Likevektspunktene er $x = 0$ og $x = \pm 1$, med lokalt minimum i $x = 0$ og lokale maksima i $x = \pm 1$. Det vil si senter i $(0,0)$ og sadelpunkter i $(\pm 1, 0)$.

2.12:4. Se figur til høyre.

Oppgaver #6

Beklager, men neste runde med oppgaver er ikke klar fordi jeg hadde for lite tid og ble avbrutt da det var som mest kritisk. Jeg må be dere sjekke websiden — jeg lover å ha neste oppgavesett klar der innen fredag morgen.