75045 Dynamiske systemer

Oppgavesett #5 — løsningsforslag (forts)

#5:1. Den gitte relasjonen $\mathrm{D}H(x)f(x) = g(x)H(x)$ må tolkes riktig: Her er g og H skalare funksjoner, mens f er vektorvaluert. Siden høyresiden er skalar må venstresiden også være det. Og det stemmer, for $\mathrm{D}H(x)$ er en lineær funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ i abstrakt versjon, eller en $1 \times n$-matrise (rekkevektor) i konkret versjon.

Vi skal vise at $H(x) = 0$ er invariant for systemet $\dot{x} = f(x)$, det vil si at dersom $H(x(0)) = 0$ for en løsning x, er $H(x(t)) = 0$ for alle t. Derivasjon med hensyn på t og kjerneregelen gir

$$\dot{H} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t)) = \mathrm{D}H(x(t))\dot{x}(t) = \mathrm{D}H(x(t))f(x(t)) = g(x)H(x).$$

Dette gir $|\dot{H}| \le M|H(x(t))|$ der M er slik at $|g(x(t))| \le M$ for $0 \le t \le T$, hvor vi altså har valgt et intervall $[0, T]$ å jobbe på. Vi har altså, siden $H(x(0)) = 0$,

$$|H(x(t))| = \left| \int_0^t \dot{H}(x(s))\,\mathrm{d}s \right| \le M \int_0^t |H(x(s))|\,\mathrm{d}s$$

hvorav Grönwalls ulikhet umiddelbart gir oss $H(x(t)) = 0$ for $0 \le t \le T$. Siden $T > 0$ var vilkårlig gjelder dette alle $t > 0$ så lenge løsningen $x(t)$ er definert. Tilfellet $t < 0$ behandles likedan, eller det er bare å huske at $x(-t)$ løser $\dot{x} = -f(x)$ og bruke det vi nettopp har vist for $t > 0$.

#5:2. (I denne besvarelsen er kjernen i argumentet ganske kort, og kommer helt til slutt. Jeg bruker det meste av tiden på å vise at banene nær origo faktisk må gå rundt origo, eller mer presist at de oppfyller $|\dot{\theta}| > c$ for en positiv konstant c.)

Her betrakter vi systemet

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Erstatter vi (t, x, y) med $(-t, x, -y)$ blir dette til $-\dot{x} = P(x, -y)$ og $\dot{y} = Q(x, -y)$, og invarians under denne transformasjonen (symmetri med hensyn på x–aksen) betyr

$$P(x, -y) = -P(x, y), \quad Q(x, -y) = Q(x, y).$$

Hvis du tegner en figur, vil du oppdage at dette betyr at vektorfeltet $f = (P, Q)$ avbildes på $-f$ ved speiling om x–aksen, ikke på seg selv. En løsningskurve speilet om x–aksen blir altså en ny løsningskurve, men med motsatt rettet bevegelse.

Deriverer vi symmetrirelasjonene ovenfor med hensyn på henholdsvis x og y og setter $y = 0$, får vi $P_x(x, 0) = -P_x(x, y)$ og $-Q_y(x, 0) = Q_y(x, 0)$, slik at $P_x(x, 0) = Q_y(x, 0) = 0$. Spesielt gjelder for matrisen $A = \mathrm{D}f(0, 0)$ at

$$A = \begin{bmatrix} P_x(0,0) & P_y(0,0) \\ Q_x(0,0) & Q_y(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{der } a = P_y(0,0) \text{ og } b = Q_x(0,0).$$

Det lineariserte systemet, med koeffisientmatrise A, har egenverdier gitt ved den karakteristiske ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$, det vil si $\lambda^2 - ab = 0$. Disse blir rent imaginære, slik at det lineariserte systemet har et senter, hvis og bare hvis $ab < 0$. For enkhelhets skyld vil jeg anta $a < 0$ og $b > 0$ videre.

Polarkoordinater gir oss

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{xQ(x,y) - yP(x,y)}{r^2} = \frac{x(bx + o(r)) - y(ay + o(r))}{r^2} = \frac{bx^2 - ay^2}{r^2} + o(1)$$

og mine antagelser om a og b gir $bx^2 - ay^2 \ge r^2 \min(|b|, |a|)$ slik at vi kan finne konstanter $c, \delta > 0$ med $\dot{\theta} > c$ dersom $r < \delta$. Det følger at en bane som starter tilstrekkelig nær origo vil gjøre et halvt omløp om origo i tid $< \pi/c$, og spesielt vil et slikt punkt på den positive x–aksen bevege seg til den negative x–aksen. Altså, om $x(0) > 0$ er liten nok og $y(0) = 0$, vil en løsning (x, y) oppfylle $x(\tau) < 0$ og $y(\tau) = 0$ for en $\tau > 0$, og der $y(t) > 0$ om $0 < t < \tau$.

Ved symmetrien vil $(x(-t), -y(-t))$ løse samme problem, slik at $x(-t) = x(t)$ og $y(-t) = -y(t)$ for alle t ved entydigheten av løsninger for initialverdiproblemet. Spesielt er $(x(-\tau), y(-\tau)) = (x(\tau), y(\tau))$, og (x, y) er periodisk med periode 2τ. Dette viser at origo er et senter for systemet.

2.10: 4. Denne oppgaven har jeg løst ved hjelp av Maple. Se vedlagte ark. (Det er ikke så vanskelig at man ikke kan løse det for hånd, men det blir mye arbeid.)

Oppgavesett #6 — løsningsforslag

3.2: 1. Systemet $\dot{x} = x - x^3$, $\dot{y} = -y$ er lett å analysere fordi det består av to uavhengige ordinære ligninger. Vi ser uten videre at ligningen for x har tre fikspunkt: Ett ustabilt i $x = 0$ og to stabile i $x = \pm 1$. Tilsvarende har ligningen for y ett stabilt fikspunkt i $y = 0$. Dette gir uten videre et sadelpunkt i $(0, 0)$ og stabile noder i $(\pm 1, 0)$.

Alle baner konvergerer mot ett av de tre kritiske punktene når $t \to \infty$, og spesielt er altså $\{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\}$ en tiltrekkende mengde, og enhver lukket mengde som inneholder disse tre punktene likeså (merk at tiltrekkende mengder per definisjon er lukket, i hvert fall slik Perko definerer det). Spesielt er intervallet $[-1, 1]$ på x–aksen tiltrekkende, men den er ikke en attraktor, for den inneholder ingen tett bane (den består av de fem banene $\{-1\}$, $(-1, 0)$, $\{0\}$, $(0, 1)$ og $\{1\}$, alle på x–aksen).[1]

Intervallet $(0, 1]$ på x–aksen er ingen attraktor fordi det ikke er lukket. Av de uendelige intervallene nevnt i oppgaven er $(0, \infty)$ og $(-1, \infty)$ diskvalifisert fra å kalles tiltrekkende fordi de ikke lukket. Det er derimot $[0, \infty)$, $[-1, \infty)$ og $(-\infty, \infty)$, og de to siste er tiltrekkende ved merknadene på toppen av forrige avsnitt. $[0, \infty)$ er ikke tiltrekkende, for det finnes punkter i en vilkårlig omegn om 0 som ender opp i $x = -1$ når $t \to \infty$.

3.2: 4.

[1] Her blir det pinlig åpenbart at bruken av samme notasjon for punkter og åpne intervaller på tallinjen skaper forvirring. I begynnelsen av avsnittet er $(-1, 0)$ et punkt, mens i slutten av avsnittet er $(-1, 0)$ et intervall!

3.3: 1.

(a) Oppgaven formelig roper etter å bli løst med polarkoordinater. Vi finner

$$\dot r = \frac{x\dot x + y\dot y}{r} = r(1-r^2)\sin\frac{1}{\sqrt{|1-r^2|}},$$
$$\dot\theta = \frac{x\dot y - y\dot x}{r^2} = 1.$$

Åpenbart er $\dot r = 0$ når $1/\sqrt{|1-r^2|} = n\pi$, det vil si når $r = \sqrt{1 \pm 1/(n\pi)^2}$. Om vi skriver $\dot r = \rho(r)$ så er

$$\rho'(r) = (1-3r^2)\sin\frac{1}{\sqrt{|1-r^2|}} - \frac{r^2}{\sqrt{|1-r^2|}}\cos\frac{1}{\sqrt{|1-r^2|}}$$

som gir

$$\rho'(r) = (-1)^{n+1}\left(n\pi \pm \frac{1}{n\pi}\right), \qquad r = \sqrt{1 \pm \frac{1}{(n\pi)^2}}.$$

Når n er odde er $\rho' > 0$ på Γ_n, som da er ustabil — mens når n er like er $\rho' < 0$ på Γ_n, og sykelen er stabil.

Etter definisjonene er Γ, gitt ved $r = 1$, *ikke* en grensesykel, for den er ikke en α– eller ω–grense for noen bane forskjellig fra seg selv. Gitt $x_0 \notin \Gamma$ så finnes alltid en Γ_n mellom x_0 og Γ, og banen som starter i x_0 kan aldri krysse Γ_n og kan dermed ikke ha Γ i sin grensemengde!

Det skulle også være egnet til å bekymre at $\rho'(r)$ ikke er begrenset i området rundt $r = 1$, slik at systemet slik det er stilt opp faktisk ikke er C^1. Dette kunne lett vært unngått ved å kvadrere faktoren $(1 - x^2 - y^2)$ foran $\sin(\ldots)$ i oppgaven. Man kan til og med få systemet til å være C^∞ ved å bruke faktoren $\exp(-1/|1 - x^2 - y^2|)$. Man kunne også godt gjort Γ til en grensesykel ved å bruke en annen høyreside i systemet for $x^2 + y^2 > 1$.

(b) Polarkoordinater gir

$$\dot r = \frac{x\dot x + y\dot y}{r} = r(1-r^2)\sin\frac{1}{1-r^2},$$
$$\dot\theta = \frac{x\dot y - y\dot x}{r^2} = 1.$$

Løses for øvrig på samme måte som (a). (Her er den deriverte av høyresiden enda mer ubegrenset nær $r = 1$).

3.3: 2. Polarkoordinater nok en gang gir

$$\dot r = \frac{x\dot x + y\dot y}{r} = r^2(1-r^2)^2,$$
$$\dot\theta = \frac{x\dot y - y\dot x}{r^2} = 1.$$

Siden $\dot r > 0$ når $r \notin \{0, 1\}$ vil sirkelen $r = 1$ være stabil fra innsiden
og ustabil fra utsiden.

3.4: 1. At $x = 2\cos 2t$, $y = \sin 2t$ passer i det gitte systemet er trivielt å sjekke. (Dette ville heller ikke vært så vanskelig å gjette: Den felles parentesen i de to ligningene gjør det fristende å prøve å sette $x = 2X$, $y = Y$ som gir et ligningssystem for (X, Y) som uten videre lar seg løse ved polarkoordinater. Dette ville også avgjøre stabilitets-spørsmålet som stilles i oppgaven.)

Vi regner ut divergensen av vektorfeltet:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-4y + x\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x + y\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)\right] = -\frac{x^2}{2} - 2y^2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)$$

som har verdien $-2 < 0$ når $x = 2\cos 2t$, $y = \sin 2t$. Dette gir at denne sykelen er en stabil grensesykel.

Oppgavesett #7 — løsningsforslag

3.9: 2. Vi antar $f \in C^1(E)$ der E er et enkeltsammenhengende område i $\mathbb{R}^2$, og at $B \in C^1(E)$ er en skalar funksjon slik at $\operatorname{div}(Bf)$ ikke er null i noen ikketom åpen delmengde av E, og ikke endrer fortegn i E. Vi skal vise at E ikke inneholder noen periodisk bane for $\dot{x} = f(x)$.

Siden E er enkeltsammenhengende, er det indre S av en eventuell periodisk bane Γ inneholdt i E. Dermed kan vi bruke Greens teorem på $\iint_S \operatorname{div}(Bf)\,dxdy$, som ikke kan være null takket være antagelsene om $\operatorname{div}(Bf)$. Men setter vi $f = (P, Q)$ blir jo

$$\iint_S \operatorname{div}(Bf)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma (BP\,\mathrm{d}y - BQ\,\mathrm{d}x) = \int_\Gamma (BPQ - BQP)\,\mathrm{d}t = 0$$

siden vi har $\mathrm{d}x = P\mathrm{d}t$ og $\mathrm{d}y = Q\mathrm{d}t$ langs Γ. Denne motsigelsen viser at det ikke kan finnes noen periodisk bane Γ i E.

Deretter antar vi at $f \in C^1(A)$ der A er et annulært område i $\mathbb{R}^2$, det vil si et område med ett hull. Anta igjen at $B \in C^1(A)$ er en skalar funksjon slik at $\operatorname{div}(Bf)$ ikke er null i noen ikketom åpen delmengde av A, og ikke endrer fortegn i A. Vi skal vise at A inneholder høyst én periodisk bane for $\dot{x} = f(x)$.

En slik periodisk bane må omgi hullet i A, for ellers ville det indre av banen være inneholdt i A — og beviset ovenfor ville gi en motsigelse. Dersom vi har *to* periodiske baner må de begge omgi hullet i A, og siden de ikke skjærer hverandre må den ene ligge på innsiden av den andre, la oss si Γ_1 er på innsiden av Γ_0. Greens teorem anvendt på området S mellom Γ_0 og Γ_1 sier at

$$\iint_S \operatorname{div}(Bf)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_0} (BP\,\mathrm{d}y - BQ\,\mathrm{d}x) - \int_{\Gamma_1} (BP\,\mathrm{d}y - BQ\,\mathrm{d}x)$$

men begge integralene er 0 av samme grunn som tidligere, mens dobbeltintegralet på venstre side ikke er null. Dette er en motsigelse.

3.12: 7. Vi bruker Bendixsons formel $I_f(x_0) = 1 + (e-h)/2$ og finner

Figur	e	h	$I_f(x_0)$
Venstre	3	3	1
Midten	0	6	-2
Høyre	2	0	2

3.12: 9. Det er klart at siden $z^k = 0$ eller $\bar{z}^k = 0$ bare for $z = 0$, er origo eneste kritiske punkt for hvert av systemene $\dot{z} = z^k$, $\dot{z} = \bar{z}^k$. Om for $r > 0$ vil $z = re^{it}$ parametrisere en kurve en gang rundt origo når t varierer fra 0 til 2π. Dette gir $z^k = r^k e^{ikt}$ og $\bar{z}^k = r^k e^{-ikt}$, som danner en vinkel henholdsvis kt og $-kt$ med x–aksen. Denne vinkelen endrer seg fra 0 til henholdsvis $2\pi k$ og $-2\pi k$ når t går fra 0 til 2π, slik at indeksen til sirkelen blir henholdsvis k og $-k$. Dette blir da også indeksen til det kritiske punktet i 0.

Merk at z^k er paralell med $z = re^{i\theta}$ akkurat når $e^{ik\theta} = \pm e^{i\theta}$, som gir $e^{i(k-1)\theta} = \pm 1$. Dette gjelder når $(k-1)\theta = n$, altså for $\theta = n/(k-1)$, hvor vi kan sette $n = 0, 1, \ldots, 2k-3$ (her forutsetter jeg $k > 1$). Strålene $z = re^{in/(k-1)}$ for $r > 0$ og $n = 0, 1, \ldots, 2k-3$ er altså separatriser for $\dot{z} = z^k$; ustabil for like n, stabil for odde n. Sektorene mellom disse er alle elliptiske, og Bendixsons formel gir en indeks $1 + (e-h)/2 = 1 + (2k-2+0)/2 = k$ som ventet.

Likeledes er $\bar{z}^k$ paralell med $z = re^{i\theta}$ akkurat når $e^{-ik\theta} = \pm e^{I\theta}$, som gir $e^{i(k+1)\theta} = \pm 1$. Dette gjelder når $(k+1)\theta = n$, altså for $\theta = n/(k+1)$, hvor vi kan sette $n = 0, 1, \ldots, 2k+1$. Strålene $z = re^{in/(k+1)}$ for $r > 0$ og $n = 0, 1, \ldots, 2k+1$ er altså separatriser for $\dot{z} = z^k$; ustabil for like n, stabil for odde n. Sektorene mellom disse er alle hyperbolske, og Bendixsons formel gir en indeks $1 + (e-h)/2 = 1 + (0 - (2k+2))/2 = -k$ som ventet.