Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN I TMA4230 Funksjonalanalyse

Bokmål
Tirsdag 31. mai 2005
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Enkel kalkulator (HP 30S)

Svar på norsk, engelsk eller en blanding kan aksepteres.

Sensurdato: 21. juni 2005

Oppgave 1

a) Skriv opp (men ikke bevis) «lukket graf»-teoremet. Pass på å få rette betingelser.

En lineær operator P på et vektorrom X kalles en *projeksjon* dersom $P^2 = P$.

To underrom Y, Z av X kalles *komplementære* hvis $Y \cap Z = \{0\}$ og $X = Y + Z$ (med andre ord, hvis enhver $x \in X$ kan skrives $x = y + z$ for entydige $y \in Y$, $z \in Z$).

b) La P være en begrenset projeksjon på et normert rom X. Vis at bildet (rekkevidden) $\operatorname{im} P$ og kjernen (nullrommet) $\ker P$ er lukkede, komplementære underrom av X.

c) Omvendt, la Y og Z være lukkede, komplementære underrom av et Banachrom X. Vis at det finnes en begrenset projeksjon på X med bilde Y og kjerne Z. *Hint*: Du må skrive $P(y + z) = y$ for $y \in Y$ og $z \in Z$. Bruk «lukket graf»-teoremet.

Oppgave 2

a) Skriv opp (men ikke bevis) spektralavbildningssatsen for polynomer anvendt på elementer i en algebra med enhet.

b) Anta at et element x i en algebra med enhet e oppfyller en polynomidentitet på formen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 e = 0.$$

Vis at da er spektret til x endelig. Vis som et spesialtilfelle at dersom $x^4 - 1 = 0$ så er $\sigma(x) \subseteq \{-1, +1, -i, +i\}$.

Oppgave 3 Anta $1 < p < \infty$, og la U og V være disjunkte åpne og konvekse delmengder av $L^p(\Omega, \mu)$. Da finnes det en $w \in L^q(\Omega, \mu)$ (hvor p er q er konjugerte eksponenter) slik at

$$\int_\Omega uw \, d\mu < \int_\Omega vw \, d\mu$$

for alle $u \in U$ og $v \in V$.

Vis dette. Forklar hvilke generelle teoremer du bruker, og skriv opp disse teoremene.

Oppgave 4

a) Skriv opp (men ikke bevis) spektralteoremet for selvadjungerte begrensede operatorer på et Hilbertrom. Skriv opp egenskapene som definerer en spektralfamilie, og forklar kort definisjonen av integralet $\int \lambda \, dE_\lambda$ som forekommer i spektralteoremet. Skriv til slutt opp det tilsvarende integralet for $f(T)$ der $f \in C\big(\sigma(T)\big)$.

b) Anta at den selvadjungerte begrensede operatoren T har endelig spektrum: Si $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ der $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Hvordan vil den tilhørende spektralfamilien se ut? Skriv om integralet i spektralteoremet som en sum.