Norwegian University of Science and Technology
Department of Mathematical Sciences

For questions during the exam:
Harald Hanche-Olsen   tel. 73 59 35 25

Exam in TMA4230 Functional analysis

Tuesday 31 May 2005
09:00 – 13:00

Permitted aids (code D): Simple calculator (HP 30S)

Note: A Norwegian text is appended.
Answers in English, Norwegian, or a mixture of the two accepted.

Grades available: 21 June 2005

Problem 1

a) State (but do not prove) the closed graph theorem, taking care to get its conditions right.

A linear operator P on a vector space X is called a *projection* if $P^2 = P$.

Two subspaces Y, Z of X are called *complementary* if $Y \cap Z = \{0\}$ and $X = Y + Z$ (that is, if every $x \in X$ can be written as $x = y + z$ for unique $y \in Y$, $z \in Z$).

b) Let P be a bounded projection on a normed space X. Show that the image (range) $\operatorname{im} P$ and kernel (null space) $\ker P$ are closed, complementary subspaces of X.

c) Conversely, let Y and Z be closed, complementary subspaces of a Banach space X. Show that there is a bounded projection on X whose image is Y and whose kernel is Z. *Hint*: You must write $P(y + z) = y$ for $y \in Y$ and $z \in Z$. Use the closed graph theorem.

Problem 2

a) State (but do not prove) the spectral mapping theorem for polynomials applied to members of an algebra with unit.

b) Assume that a member x of an algebra with a unit e satisfies a polynomial identity of the form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 e = 0.$$

Show that then the spectrum of x is finite. As a special case, show that if $x^4 - 1 = 0$ then $\sigma(x) \subseteq \{-1, +1, -i, +i\}$.

Problem 3

a) State (but do not prove) the spectral theorem for self-adjoint bounded operators on a Hilbert space. Also state the defining properties of a spectral family, and briefly state the definition of the integral $\int \lambda \, dE_\lambda$ occurring in the spectral theorem. Finally, write the corresponding integral for $f(T)$ where $f \in C\big(\sigma(T)\big)$.

b) Assume that the self-adjoint bounded operator T has finite spectrum: Say $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ where $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. What will the corresponding spectral family look like? Rewrite the integral in the spectral theorem as a sum.

We have, strictly speaking, only defined $f(T)$ for *real-valued* functions $f \in C\big(\sigma(T)\big)$. But we could just as well do it for complex-valued functions, by various means – for example, by treating the real and imaginary parts of f separately. All the standard properties of the functional calculus remain the same in the complex case, except that $f(T)$ will not be self-adjoint when f is not real-valued on the spectrum. In fact, $f(T)^* = \bar{f}(T)$ where $\bar{f}$ is the function defined by $\bar{f}(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$. (Also, we have some difficulty with the composition rule, because we don't know how to make sense of $f\big(g(T)\big)$ when $g(T)$ is not self-adjoint.)

You are not asked to prove any of the facts of the previous paragraph – but you are free to use them below.

c) If T is a self-adjoint operator on a Hilbert space H, write $U_t = e^{itT}$ for all real numbers t. More precisely, $U_t = f_t(T)$, where f_t is the function defined by $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$.

Show that then U_t is a unitary operator ($U_t^* U_t = U_t U_t^* = I$), and also $U_{s+t} = U_s U_t$ and $dU_t/dt = TU_t$.

Here, the derivative is defined as the usual limit, taken in the norm topology.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN I TMA4230 Funksjonalanalyse

Bokmål
Tirsdag 31. mai 2005
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Enkel kalkulator (HP 30S)

Svar på norsk, engelsk eller en blanding kan aksepteres.

Sensurdato: 21. juni 2005

Oppgave 1

a) Skriv opp (men ikke bevis) «lukket graf»-teoremet. Pass på å få rette betingelser.

En lineær operator P på et vektorrom X kalles en *projeksjon* dersom $P^2 = P$.

To underrom Y, Z av X kalles *komplementære* hvis $Y \cap Z = \{0\}$ og $X = Y + Z$ (med andre ord, hvis enhver $x \in X$ kan skrives $x = y + z$ for entydige $y \in Y$, $z \in Z$).

b) La P være en begrenset projeksjon på et normert rom X. Vis at bildet (rekkevidden) $\operatorname{im} P$ og kjernen (nullrommet) $\ker P$ er lukkede, komplementære underrom av X.

c) Omvendt, la Y og Z være lukkede, komplementære underrom av et Banachrom X. Vis at det finnes en begrenset projeksjon på X med bilde Y og kjerne Z. *Hint*: Du må skrive $P(y + z) = y$ for $y \in Y$ og $z \in Z$. Bruk «lukket graf»-teoremet.

Oppgave 2

a) Skriv opp (men ikke bevis) spektralavbildningssatsen for polynomer anvendt på elementer i en algebra med enhet.

b) Anta at et element x i en algebra med enhet e oppfyller en polynomidentitet på formen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 e = 0.$$

Vis at da er spektret til x endelig. Vis som et spesialtilfelle at dersom $x^4 - 1 = 0$ så er $\sigma(x) \subseteq \{-1, +1, -i, +i\}$.

Oppgave 3

a) Skriv opp (men ikke bevis) spektralteoremet for selvadjungerte begrensede operatorer på et Hilbertrom. Skriv opp egenskapene som definerer en spektralfamilie, og forklar kort definisjonen av integralet $\int \lambda\, dE_\lambda$ som forekommer i spektralteoremet. Skriv til slutt opp det tilsvarende integralet for $f(T)$ der $f \in C\big(\sigma(T)\big)$.

b) Anta at den selvadjungerte begrensede operatoren T har endelig spektrum: Si $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ der $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Hvordan vil den tilhørende spektralfamilien se ut? Skriv om integralet i spektralteoremet som en sum.

Vi har strengt tatt bare definert $f(T)$ for *reelle* funksjoner $f \in C\big(\sigma(T)\big)$. Men vi kunne like gjerne gjort det for komplekse funksjoner på forskjellig vis – for eksempel ved å behandle realdelen og imaginærdelen av f separat. Alle egenskapene til funksjonalkalkylen forblir de samme i det komplekse tilfellet, bortsett fra at $f(T)$ ikke blir selvadjungert når f ikke er reell på spektret. Faktisk er $f(T)^* = \bar{f}(T)$, hvor $\bar{f}$ er funksjonen definert ved $\bar{f}(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$. (Vi har også litt vanskeligheter med sammensetningsregelen, siden vi ikke vet hvordan man definerer $f\big(g(T)\big)$ når $g(T)$ ikke er selvadjungert.)

Du bes ikke om å bevise noen av påstandene i avsnittet over – men du må gjerne bruke dem nedenfor.

c) Dersom T er en selvadjungert operator på et Hilbertrom H, skriv $U_t = e^{itT}$ for alle reelle tall t. Mer presist er $U_t = f_t(T)$, hvor f_t er funksjonen definert ved $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$.

Vis at da er U_t en unitær operator ($U_t^* U_t = U_t U_t^* = I$), og videre $U_{s+t} = U_s U_t$ og $dU_t/dt = TU_t$.

Her er den deriverte definert som den vanlige grensen, tatt i normtopologien.