Midterm test

TMA4230 Functional analysis

2005–03–11

Norwegian text on the other side. Time available: 60 minutes. Answers to be given in English, Norwegian, or a mixture of the two. There may be too many questions. Just do what you have time for – I will try to be reasonable in grading. If you cannot do the details on a problem, at least try to indicate what you would need to prove and why a known theorem will complete the proof.

Problem 1. State (but do not prove) the Uniform Boundedness Theorem.

Problem 2. Let X and Y be Banach spaces, and let $T\colon X \to Y$ be a linear (but possibly unbounded) map. For any bounded linear functional f on Y, define the (possibly unbounded) linear functional $T^* f$ on X by the standard formula

$$(T^* f)(x) = f(Tx), \qquad x \in X.$$

Assume that $T^* f$ is in fact bounded for every $f \in Y^*$. Prove that then T is bounded.

Hint: Consider all the functionals $T^* f$ where $f \in Y^*$ with $\|f\| \le 1$.

Problem 3. Consider functions on a measure space (Ω, μ).

State Hölder's inequality for functions $u \in L^p$, $v \in L^q$ where p and q are conjugate exponents in $[1, \infty]$. Explain also how $\|u\|_p$ can be expressed in terms of integrals $\int uv\,d\mu$ with $v \in L^q$.

(Proofs are not required for this problem.)

Problem 4. Consider now functions on $\mathbb{R}$ with Lebesgue measure.

Let $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $u \in L^p(\mathbb{R})$, where $1 \le p < \infty$. Define the convolution $f * u$ by

$$(f * u)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,u(x-t)\,dt,$$

for those x for which the integral exists. Prove that $f * u \in L^p$, and that $\|f * u\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|u\|_p$.

Hint: Use the result of problem 3 to estimate $\|f * u\|_p$. Interchange the order of integration in the resulting double integral. Assume for simplicity that f and u are nonnegative functions. (Extending this to f and u that are not nonnegative is not hard, but will only earn you a tiny extra credit on this test.)

Problem 5. A sequence $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ is called *periodic* with period p if $x_{k+p} = x_k$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$ The set of periodic sequences form a subspace of the space ℓ^∞ of bounded sequences (you need not prove this). The sequences in the closure of this subspace will be called *almost periodic* sequences.

Prove that there exists a bounded linear functional f on ℓ^∞ so that $f(x) = 0$ for every almost periodic x, while $f(e_1) \ne 0$ where

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots).$$

For extra credit, prove that you can get $\|f\| = 1$ and $f(e_1) = \frac{1}{2}$.

Semesterprøve

TMA4230 Funksjonalanalyse

2005–03–11

English text on the other side. Tilgjengelig tid: 60 minutter. Svar på engelsk, norsk, eller en blanding. Det er sikkert for mange spørsmål. Bare gjør det du rekker – jeg skal prøve å være rimelig med rettingen. Hvis du ikke får til detaljene i en oppgave, så prøv i det minste å indikere hva du trenger å bevise, og hvorfor et kjent teorem vil fullføre beviset.

Oppgave 1. Skriv opp (men ikke bevis) teoremet om uniform begrensethet.

Oppgave 2. La X og Y være Banachrom, og la $T\colon X \to Y$ være en lineær (kanskje ubegrenset) avbildning. For enhver begrenset lineærfunksjonal f på Y, definer (den muligens ubegrensede) lineærfunksjonalen $T^* f$ på X ved standardformelen

$$(T^* f)(x) = f(Tx), \qquad x \in X.$$

Anta at $T^* f$ faktisk er begrenset for enhver $f \in Y^*$. Vis at da er T begrenset.

Hint: Betrakt alle funksjonalene $T^* f$ der $f \in Y^*$ med $\|f\| \le 1$.

Oppgave 3. Betrakt funksjoner på et målrom (Ω, μ).

Skriv opp Hölders ulikhet for funksjoner $u \in L^p$, $v \in L^q$ hvor p og q er konjugerte eksponenter i $[1, \infty]$. Forklar også hvordan $\|u\|_p$ kan uttrykkes ved hjelp av integraler $\int uv\, d\mu$ med $v \in L^q$.

(Beviser er ikke nødvendig for dette spørsmålet.)

Oppgave 4. Betrakt nå funksjoner på $\mathbb{R}$ med Lebesguemål.

La $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $u \in L^p(\mathbb{R})$, der $1 \le p < \infty$. Definer konvolusjonen $f * u$ ved

$$(f * u)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, u(x-t)\, dt,$$

for de x der integralet eksisterer. Vis at $f * u \in L^p$, og at $\|f * u\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|u\|_p$.

Hint: Bruk resultatet fra oppgave 3 til å estimere $\|f * u\|_p$. Bytt om integrasjonsrekkefølgen i det resulterende dobbeltintegralet. Anta for enkelhets skyld at f og u er ikkenegative funksjoner. (Å utvide dette til f og u som ikke er ikkenegative er ikke vanskelig, men vil bare gi deg minimale ekstrapoeng på denne prøven.)

Oppgave 5. En følge $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ kalles *periodisk* med periode p hvis $x_{k+p} = x_k$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$ Mengden av periodiske følger danner et underrom av rommet ℓ^∞ av begrensede følger (du trenger ikke bevise det). Vi vil kalle følgene i tillukningen av dette underrommet *nesten periodiske* følger.

Vis at det finnes en begrenset lineærfunksjonal f på ℓ^∞ slik at $f(x) = 0$ for enhver nesten periodisk x, mens $f(e_1) \neq 0$ der

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots).$$

For ekstra poeng, vis at du kan få til $\|f\| = 1$ og $f(e_1) = \frac{1}{2}$.