Løsningsforslag øving 1

75033 Lineær analyse 1999V

Merknad: Løsningsforslaget er satt sammen av innleverte LaTeX-filer fra gruppene. Jeg har redigert litt for layouten sin skyld, og endret noen formuleringer her og der. Men som en hovedregel har besvarelsene fått stå, og jeg har kommentert dem i avsnitt merket slik som dette underveis. HH–O

Oppgave 1 (B4: AB, PIG)

a: For at $d(x,y)$ skal definere en metrikk, på mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall, må $d(x,y)$ oppfylle de 4 aksiomene for en metrikk.

1. $d(x,x) = 0$
2. $d(x,y) > 0$ for $x \neq y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Dermed vil $d(x,y) = (x-y)^2$ ikke definere en metrikk på mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall fordi det bryter aksiom $4: d(x,-x) = 4x^2 > d(x,0) + d(0,-x) = 2x^2$

Skal vise at $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ definerer en metrikk på mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall. Viser dermed at $d(x,y)$ tilfredstiller de 4 aksiomene.

$$\begin{aligned}
d(x,x) &= \sqrt{|x-x|} = 0, \quad \text{OK!} \\
d(x,y) &= \sqrt{|x-y|} > 0 \text{ for } x \neq y, \quad \text{OK!} \\
d(x,y) &= \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x), \quad \text{OK!} \\
d(x,y) &= \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|} \\
&\leq \sqrt{\sqrt{|x-z|}^2 + 2\sqrt{|x-z|}\sqrt{|z-y|} + \sqrt{|z-y|}^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|})^2} = \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \\
&= d(x,z) + d(z,y), \quad \text{OK!}
\end{aligned}$$

Har derved vist at $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ definerer en metrikk på $\mathbb{R}$.

b: Skal vise at $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$ definerer en norm på C[a,b].

- $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt > 0$ hvis $x(t)$ er kontinuerlig, OK!
- $\|\alpha x\|_1 = \int_a^b |\alpha x(t)|dt = |\alpha| \int_a^b |x(t)|dt$ fordi α er en skalar uavhengig av t, OK!
- $\|x+y\|_1 = \int_a^b |(x+y)(t)|dt = \int_a^b |x(t)+y(t)|dt \leq \int_a^b (|x(t)| + |y(t)|)dt = \|x\|_1 + \|y\|_1$, OK!

Har dermed vist at $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$ definerer en norm på C[a,b].

Merknad: Argumentet for at $\int_a^b |x(t)|\,dt > 0$ dersom x er kontinuerlig og ikke null, krever kanskje litt mer argumentasjon. At $x \neq 0$ betyr at det finnes minst ett punkt $t_0 \in [a,b]$ slik at $x(t_0) \neq 0$. Siden x er kontinuerlig, kan du bruke definisjonen av kontinuitet med $\varepsilon = |x(t_0)|/2$, og finne en $\delta > 0$ slik at $|t-t_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$. Av den siste ulikheten følger

$$\big||x(t)| - 2\varepsilon\big| = \big||x(t)| - |x(t_0)|\big| \leq |x(t) - x(t_0| < \varepsilon,$$

slik at $|x(t)| - 2\varepsilon > -\varepsilon$, og dermed $|x(t)| > \varepsilon$. Det følger at

$$\int_a^b |x(t)|\,dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |x(t)|\,dt > 2\delta\varepsilon > 0.$$

(Det kan hende at intervallet $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ikke er inneholdt i $[a, b]$, men de to intervallene vil i hvert fall overlappe i et intervall med en positiv lengde, som kan settes inn i stedet for 2δ i den siste ulikheten ovenfor. Underveis har jeg også brukt ulikheten $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$, som vises slik: Trekantulikheten gir $|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|$, hvorav $|a| - |b| \leq |a - b|$. Bytter vi om a og b får vi $|b| - |a| \leq |a - b|$. Disse to ulikhetene tilsammen er ekvivalent med $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.)

Oppgave 2 (A5: TD, RE, EE, CC, KB)

a: $B_1(x_0) = \{\zeta \in \mathbb{R} : d(x_0, \zeta) < 1\}$: Dette blir det åpne intervallet $(x_0 - 1, x_0 + 1)$.

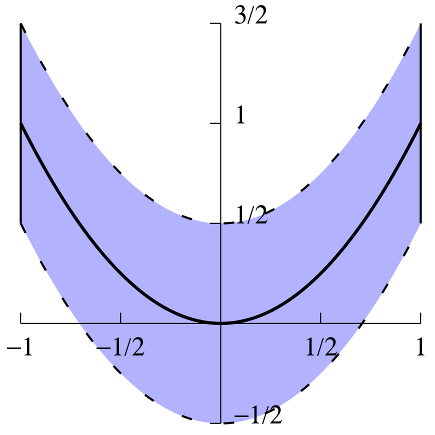
$B_1(x_0) = \{\zeta \in \mathbb{C} : d(x_0, \zeta) < 1\}$: Dette blir en disk i det komplekse planet med sentrum i x_o og radius=1. Randen er ikke med.

$B_1(x_0) = \{x \in C[a, b] : \|x - x_0\|_\infty < 1\}$, der $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$: Dette blir alle funksjoner på intervallet [a,b] som har en vertikal avstand til x_0 mindre enn 1.

Området som inneholder grafen til alle funksjoner i $B_{1/2}(x_0)$ hvor $x_0(t) = t^2$ er begrenset av funksjonene $t = 1, t = -1, x = t^2 - 0.5$ og $x = t^2 + 0.5$. Området er vertikalt lukket og horisontalt åpent.

b: $\bar{B}_r(\cos t) = \{t \in C[0, 2\pi] : \|\sin t - \cos t\|_\infty < r\}$. Minste r må være lik maksimum av $|\sin t - \cos t|$. $|\sin t - \cos t|$ har maksimum for $t = \frac{3\pi}{4}$ og $t = \frac{7\pi}{4}$. Da er $r = \sqrt{2}$.

Merknad: Jeg har laget følgende figur for å illustrere oppgave 2a (jeg mistenker at løserne har blandet kortene litt når de snakker om «vertikalt lukket og horisontalt åpent» – linjene som avgrenser området på siden skal være med, mens kurvene øverst og nederst ikke skal være med):



Oppgave 3 (A4: TSJ, TH, BOLS, MSUK, ØKVS)

a: Skal vise at $\|\cdot\|$ er en norm på X :
Punkt 1 og 2 følger direkte fra egenskapene til $\|\cdot\|$.
Viser trekantulikheten, og bruker hintet:

$$\left\|\lambda\frac{x}{\|x\|} + (1 - \lambda)\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq 1$$

Velger $\lambda = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$ dvs. $(1-\lambda) = \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}$

$$\Rightarrow \left\|\lambda \frac{x}{\|x\|} + (1-\lambda)\frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|+\|y\|} + \frac{y}{\|x\|+\|y\|}\right\| = \left|\frac{1}{\|x\|+\|y\|}\right| \cdot \|x+y\| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|} \qquad \square$$

b: Punkt en og to følger nesten direkte:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0 \quad ; x \neq 0 \qquad \square$$

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |ax_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|a|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \underline{a\|x\|_p} \qquad \square$$

For å vise at $\|x\|_p$ er en norm på X, bruker vi normen i a) og viser at $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ er konveks. Skal altså vise at

$$\|\lambda x + (1-\lambda y)\|_p \leq 1$$

når det antas:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \quad \wedge \quad \|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$$

Bevis:

$$(\|\lambda x + (1-\lambda y)\|_p)^p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k + (1-\lambda) y_k|^p\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda |x_k|^p + (1-\lambda)|y_k|^p$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\|\lambda x + (1-\lambda y)\|_p \leq 1} \qquad \square$$

c: Antar $|x_{(1)}|, |x_{(2)}|, \ldots, |x_{(n)}|$ er en ordning av $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ etter avtagende størrelse.

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{k=1}^{n} |x|^p \geq |x_{(1)}|^p = (\|x\|_\infty)^p$$

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{k=1}^{n} |x|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_{(1)}|^p = n|x_{(1)}|^p = n\,(\|x\|_\infty)^p$$

Dvs.

$$(\|x\|_\infty)^p \leq (\|x\|_p)^p \leq n\,(\|x\|_\infty)^p$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Dette gir

$$\|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \leq \|x\|_\infty \lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty} \qquad \bigstar$$

Merknad: Denne løsningen er elegant, men jeg ville nok formulert meg litt annerledes på slutten: Slik det står, virker det som det forutsettes at $\lim_{p\to\infty}$ eksisterer, men både eksistensen og verdien av grensen følger direkte av ulikhetene $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$ og det faktum at $\lim_{p\to\infty} n^{1/p} = 1$ (er det ikke dette calculusbøkene kaller «the squeeze law»?)

Oppgave 4 (B2: BR, AL, OPL, HSD, TR)

a: i) Enhver konvergent følge av heltall konvergerer mot et heltall. Dermed er tillukningen av $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ d.v.s $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

ii) En følge i $\mathbb{Q}$ kan konvergere mot et irrasjonalt tall. F.eks

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

da vil

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$$

iii) De komplekse tall med rasjonale imaginær- og realdeler vil ved tillukning bli mengden av alle komplekse tall med reell imaginær- og realdel p.g.a ii). Dermed er tillukningen $\mathbb{C}$.

iv) Disken {z: |z|<1} i $\mathbb{C}$ har konvergente følger som konvergerer mot |z|=1. F.eks $z_n = (1-\frac{1}{n})i$ går mot |z|=i. Ingen følger i disken kan konvergere mot |Z|>1. Dermed er tillukningen den lukkede disken. $\{Z : |Z| \leqq 1\}$

b: Eksempel med $\mathbb{Z}$. La $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow B_1(x_0) = \{x_0\}$.

$$\overline{B_1(x_0)} = \{\text{grensene for alle konvergente følger i } \{x_0\}\} = \{x_0\}$$

Mens

$$\bar{B}_1(x_0) = \{x_0 - 1, x_0, x_0 + 1\} \neq \overline{B_1(x_0)}$$

c: Ser på hvert tilfelle. Antar at $\mathbb{R}$ utgjør hele rommet.

i) For hver $\varepsilon > 1$ og $x \in \mathbb{Z}$ vil $B_\varepsilon(x)$ inneholde reelle tall $\notin \mathbb{Z}$. Dermed er $\mathbb{Z}$ ikke en omegn om alle sine punkter og altså ikke åpen. Alle konvergente følger i $\mathbb{Z}$ konvergerer mot grenser $\in \mathbb{Z}$ så $\mathbb{Z}$ er lukket.

ii) For enhver $\varepsilon > 0$ og $x \in \mathbb{Q}$ vil $B_\varepsilon(x)$ innholde irrasjonale tall så $\mathbb{Q}$ er ikke åpen.
Det finnes iflg a) ii) konvergente følger i $\mathbb{Q}$ som har grenser $\notin \mathbb{Q}$ så $\mathbb{Q}$ er ikke lukket.

iii) Følger fra ii) at dette hverken er en åpen eller lukket.

iv) Disken er åpen siden en for hver z i disken kan finne $\varepsilon > 0$ s.a $B_\varepsilon(z)$ er inneholdt i $\mathbb{C}$.
Disken er ikke lukket siden komplementet ikke er åpent. Dette fordi:
La $z \in \mathbb{C}$ s.a $|z| = 1$. Da gjelder for alle $\varepsilon > 0$ at $B_\varepsilon(z)$ ikke er inneholdt i komplementet til disken.

Merknad: Selvsagt er det rett at enhver konvergent følge av heltall konvergerer mot et heltall. Men som så mange andre selvsagtheter kan man argumentere mer for denne: Anta (x_n) er en følge av heltall og at $x_n \to x$. Skriv $\lfloor x \rfloor$ for største heltall $\leq x$ og $\lceil x \rceil$ for minste heltall $\geq x$: Hvis x ikke selv er heltall er da $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$, og $B_\varepsilon(x)$ inneholder da ingen heltall dersom $\varepsilon = \min\bigl(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\bigr)$. Men dette strider mot at $x_n \to x$.

Oppgave 5 (A2: MBS, HTK, AHS, AG, TG)

a: La x_0 være et opphopningspunkt til $A \subseteq X$, og la U være en omegn om x_0. Anta at U inneholder et endelig antall punkter fra A, dvs $|A \cap U| \leq N < \infty$

La $\eta = \min\{d(x, x_0)\}$ for $x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$. Siden U er en omegn om x_0, finnes en $B_\delta(x_0) \subset U$. Vi har at $B_\varepsilon(x_0) \subset B_\delta(x_0)$ $\forall 0 < \varepsilon < \delta$. Velg $\varepsilon = \min\{\delta, \eta\}$. Da er $B_\varepsilon(x_0) \ = \{x_0\}$, og

$$B_\varepsilon(x_0) \cap A = \begin{cases} \{x_0\} & x_0 \in A, \\ \emptyset & x_0 \notin A. \end{cases}$$

Dette er en motsigelse. Dermed må U inneholde uendelig mange punkter i A.

b: La A være en lukket delmengde av X, og la x_0 være et opphopningspunkt. Da finnes det en følge $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ som konvergerer mot x_0. Siden A er lukket, må $x_0 \in A$.

Motsatt, la x_0 være et grensepunkt for en følge $\{x_n\}$, $x_n \in A$. Dersom $x_n = x_0$ for en n, er $x_0 \in A$. Hvis ikke, såfinnes det for hver $\varepsilon > 0$ en $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$ der $x \neq x_0$. Ergo er x_0 et opphopningspunkt for A. La A inneholde alle sine opphopningspunkter. Da inneholder A alle sine grensepunkt, og er følgelig lukket.

Merknad: I 5b skulle det vært sagt at følgen $\{x_n\}$ er en følge i A. Det burde også vært argumentert for at en slik følge eksisterer, med grense x_0: Velg nemlig $x_n \in A \cap B_{1/n}(x_0)$ (som er ikketom). Denne følgen konvergerer mot x_0.

Den siste setningen burde kanskje vært formulert mer som «Da inneholder A alle grensepunkter for følger i A, og er følgelig lukket.»

Min egen løsning på 5b bruker for øvrig ingen følger i det hele tatt: Hvis A er lukket og x_0 er et opphopningspunkt for A, så er $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ for hver $\varepsilon > 0$. Siden komplementet til A er åpent, betyr det at x_0 ikke kan tilhøre komplementet, og derfor er $x_0 \in A$.

Omvendt, om A inneholder alle sine opphopningspunkter og $x_0 \notin A$, så må vi ha $B_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ for en $\varepsilon > 0$, siden x_0 ellers ville vært et opphopningspunkt for A. Altså er komplementet til A åpent, og A er derfor lukket.

Løsningsforslag øving 2

75033 Lineær analyse 1999V

Oppgave 1 (B3; **b**-punktet ved HH-O)

a: **[Notatet, oppg. 10]** Skal vise at x er et grensepunkt av følgen (x_n) hvis og bare hvis det finnes en underfølge av (x_n) som konvergerer mot x.

1) Underfølgen (y_k) av (x_n) konvergerer mot x
$\Leftrightarrow$ enhver omegn om x inneholder en hale av følgen (y_k)
$\Rightarrow$ enhver omegn om x inneholder minst ett punkt fra enhver hale i følgen (x_n)
$\Leftrightarrow$ x er et grensepunkt av følgen (x_n).

2) Grensepunkt: $\forall \varepsilon > 0, N\colon \exists n \geq N\colon d(x_n, x) < \varepsilon$. La $\varepsilon_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$ Velger $x_{n(m)}$ slik at $d(x_{n(m)}, x) < \varepsilon_m$. Må ha stigende $n(m)$. Velger derfor $N(m+1) > n(m)$. Da har vi en konvergent underfølge $(x_{n(m)})_{m=1}^{\infty}$.

b: Anta $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge med grensepunkt x. La $\varepsilon > 0$. Det finnes en N slik at hver gang $m, n \geq N$ er $d(x_m, x_n) < \varepsilon$) (Cauchy-egenskapen). Siden følgen har x som grensepunkt, finnes $m \geq N$ med $d(x_m, x) < \varepsilon$. For enhver $n \geq N$ er da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dette viser at $x_n \to x$.

Merknad: Det er vanlig på norsk å si *delfølge* heller enn underfølge.

Oppgave 2 (B2)

a: Skal vise at enhver lukket delmengde av et kompakt metrisk rom er kompakt. Anta X et kompakt metrisk rom, og F en lukket delmengde av X. Definer følgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ i F. Da $F \subset X$, og X er et kompakt metrisk rom vil enhver følge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ha minst et grensepunkt i X. Men da F er lukket vil ethvert grensepunkt for en følge i F tilhøre F (prop. 12). Da grensepunktene for enhver følge i F ligger i F vil F være kompakt.

b: Skal vise at enhver kompakt delmengde av et vilårlig metrisk rom er lukket og begrenset.

Lukket: Antar X et vilkårlig metrisk rom, og F en kompakt delmengde av F. Antar $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en vilkårlig konvergent følge i F. Da F kompakt vil enher følge i F ha minst et grensepunkt i F, og siden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ er konvergent vil den ha presis ett grensepunkt $f \in F$. Da grensen til enhver konvergent følge i F ligger i F har vi vist at F er lukket.

Begrenset: Idé: Vil vise at hvis F ikke er begrenset så vil F heller ikke være kompakt.

$$\forall x \in F\, \exists x_n\colon x_n \in (B_{n+1}(x) \setminus B_n(x)) \cap F$$

Da er $d(x_n, x_{n+2}) > 1$. Da vil følgen $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ ikke ha noe grensepunkt, hvilket betyr at F ikke er kompakt.

Merknad: Det finnes flere mulige måter å vise **a**-punktet på. La for eksempel $\mathscr{F}$ være en familie av lukkede delmengder av F, med endelig snittegenskap. Men da er $\mathscr{F}$ også en familie lukkede delmengder av X, og den har selvsagt endelig snittegenskap. Siden X er antatt kompakt, er $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$. Derfor er også F kompakt. (Dette beviset synes nesten *for* kjapt, men det er fordi en detalj er feid litt under teppet: Når F er en lukket delmengde av X, er en (relativt) lukket delmengde av F også en lukket delmengde av X.)

Beviset for begrensethet i **b**-punktet bryter sammen hvis $B_{n+1}(x) \setminus B_n(x) = \emptyset$, men dette kan repareres: Det er bare å hoppe over slike n i følgen. Men det er kanskje lettere å merke seg at om F ikke er begrenset, vil det for en gitt x_0 og n finnes $x \in F$ med $d(x_0, x) > n$. For ellers er alltid $d(x_0, x) \le n$, og dermed $d(x, y) \le d(x, x_0) + d(x_0, y) \le 2n$ for alle $x, y \in F$. Så det er bare å la $x_n \in F$ med $d(x_n, x_0) > n$. Da kan ikke (x_n) ha noe grensepunkt y, for $d(x_n, y) < \varepsilon$ impliserer $n < d(x_n, x_0) < d(y, x_0) + \varepsilon$.

Et alternativt bevis for **b**-punktet konstruerer familier $\mathscr{F}$ av lukkede delmengder av F, med endelig snittegenskap men slik at $\bigcap \mathscr{F} \ne \emptyset$, som viser at F ikke er kompakt: Hvis F ikke er lukket, la $x \in \overline{F} \setminus F$ og la $\mathscr{F} = \{F \cap \bar{B}_\varepsilon(x) \colon \varepsilon > 0\}$. Hvis F ikke er begrenset, fikser en x_0 og la $\mathscr{F} = \{F \setminus B_r(x_0) \colon r > 0\}$.

Oppgave 3 (A3)

a: $X = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$, $f \colon X \to X$, $f(x) = \frac{1}{2}x + x^{-1}$.
$d(x, y) = |y - x|$ på X.

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left| \frac{1}{2}y + \frac{1}{y} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{2}(y - x) + \frac{x - y}{xy} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right)(y - x) \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| \cdot |y - x| \\ &\le \frac{1}{2} d(x, y) \end{aligned}$$

Dermed er f en kontraksjon, og den minste verdien av kontraksjonsfaktoren er $K = \frac{1}{2}$ (som gjelder for alle x og y).

b: $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. f^N er en kontraksjon for et tall N. Av Banachs fikspunktteorem: f^N har nøyaktig ett fikspunkt x.

$$\begin{gathered} f^{N+1}(x) = f(f^N(x)) = f^N(f(x)) = f(x) \\ f(f^N(x)) = f(x) \text{ fordi } f^N(x) = x \\ f^N(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ fikspunkt til } f^N \end{gathered}$$

Siden f^N kun skal ha ett fikspunkt er $f(x) = x$.

Skal vise at det finnes ett og bare ett fikspunkt:

Anta at vi har to fikspunkt x og y slik at $f(x) = x$ og $f(y) = y$. Det betyr at $f^N(x) = x$ og $f^N(y) = y$. Men siden f^N kun har ett fikspunkt, må $x = y$.

Oppgave 4 (B4: AB, KU, PIG, AB)

a: Eksempel på et ikke-komplett metrisk rom X: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Kontraksjon på X uten noen fikspunkter: $f(x) = \frac{1}{2}x$.

b: Skal vise at $d(f(x), f(y)) \le K d(x, y)$ ikke kan erstattes med $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ved å betrakte eksemplet $X = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ med funksjonen $f \colon X \to X$ gitt ved $f(x) = x + x^{-1}$.

Benytter standard metrikk:

$$d(f(x), f(y) < Kd(x, y)$$

$$|x + x^{-1} - y - y^{-1}| < K|x - y|$$

$$\left| \frac{x - y + x^{-1} + y^{-1}}{x - y} \right| < K$$

$$\left| 1 + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x - y} \right| < K$$

$$\left| 1 - \frac{1}{xy} \right| < K$$

$$x, y \in [1, \infty) \implies 0 < \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| < 1$$

men $K < 1$, og det går ikke! Altså kan en ikke erstatte $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ med $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.
x er ikke et fikspunkt da $x \neq x + x^{-1}$ $\forall x \in X$.

Merknad: Logikken i utregningen kunne nok vært klarere fremstilt: Saken er at

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \left| 1 - \frac{1}{xy} \right|$$

som viser at $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ men at det ikke finnes noen $K < 1$ slik at $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ (som man ser ved å la $xy \to \infty$). Så betingelsen i Banachs fikspunktteorem holder *nesten.* Men det er ikke godt nok, for har f ikke noe fikspunkt.

Oppgave 5 (A4)

a: La $1 \leq p < \infty$.

Skal vise at l^p er et vektorrom – må da vise at l^p er lukket under addisjon og multiplikasjon med skalar.

La $x \in l^p$, $a \in \mathbb{R}$. Ser på ax:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |ax_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |a|^p |x_j|^p = |a|^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$$

La $x, y \in l^p$. Ser på $x + y$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p = 2^p \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_j}{2} + \frac{y_j}{2} \right|^p \leq 2^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j|^p + |y_j|^p|) < \infty$$

(bruker konveksitet). Altså er l^p et vektorrom.

Skal vise at $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$ er en norm på l^p. Viste dette for alle endeligdimensjonale vektorer i forrige øving. Beviset gjelder også for dette vektorrommet.

b: Skal vise at l^p er komplett. Lar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchy-følge i l^p. x_n er selv en følge – $x_n = \{x_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$. $x_{nj} \in \mathbb{R}$. Målet er å vise at x_n konvergerer mot en rekke y i p-norm.

$$\begin{aligned}
x_1 &= [x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1j}, \dots] \\
x_2 &= [x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2j}, \dots] \\
&\vdots \\
x_n &= [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nj}, \dots] \\
&\downarrow \\
y &= [y_1, y_2, y_3, \dots, y_j, \dots]
\end{aligned}$$

Vil først vise at hver «kolonne» konvergerer, altså $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = y_j$.

Siden $\{x_n\}$ er en Cauchy-følge finnes det for enhver $\varepsilon > 0$ en N slik at $m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\|_p < \varepsilon$. Vi har da for en fiksert j at $|x_{mj} - x_{nj}| < \varepsilon$ siden $|y_j| \leq \|y\|$ for alle $y \in l^p$ og $j \in \mathbb{N}$ [likhet kun hvis maksimalt én komponent y_j i y er ulik null]. $\{x_{nj}\}_{n=1}^{\infty}$ er da en Cauchyfølge og siden $\mathbb{R}$ er komplett vil den konvergere. Kall grensen y_j.

Vil nå vise at grenseverdien $y \in l^p$. La $\varepsilon > 0$. Det finnes en N slik at $m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\|_p < \varepsilon$. Velg en $M \in \mathbb{N}$. Har da at

$$\left(\sum_{j=1}^{M} |x_{mj} - x_{nj}|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{mj} - x_{nj}|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad \text{for alle } n, m \geq N.$$

Dersom vi nå lar $n \to \infty$ i summen til venstre får vi $\left(\sum_{j=1}^{M} |x_{mj} - x_{nj}|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$. Siden $M \in \mathbb{N}$ kan vi la $M \to \infty$. Opphøyer vi så begge sider i p får vi $\sum_{j=1}^{\infty} |x_{mj} - x_{nj}|^p \leq \varepsilon^p < \infty$.

Dette viser at $(x_m - y) \in l^p \, \forall m > N$.

Siden vi har vist at l^p er et vektorrom og at det er lukket under subtraksjon, og siden $x_m \in l^p \, \forall m$ får vi at $y = x_m - (x_m - y) \in l^p$.

Vil nå vise at $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mot y. Viste isted at for $m > N$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{mj} - y_j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \Leftrightarrow \|x_m - y\|_p < \varepsilon.$$

Siden vi for enhver $\varepsilon > 0$ kan velge N slik at dette gjelder må $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergere mot y.

Siden alle Cauchyfølger i l^p har en grense i l^p er dermed l^p komplett.

Merknad: Det er nok riktig at beviset fra forrige øving for at $\|\cdot\|_p$ er en norm også virker i uendelig dimensjon, men siden det beviset var nokså infløkt (for trekantulikheten i hvert fall), er det kanskje enklere å redusere det uendeligdimensjonale tilfellet til det endeligdimensjonale:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |x_j+y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

hvor den første ulikheten er trekantulikheten for $\|\cdot\|_p$ i $\mathbb{R}^N$. La nå $N \to \infty$ for å konkludere at $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

For øvrig gjelder disse bevisene like godt med komplekse som med reelle koeffisienter.

Løsningsforslag øving 3

75033 Lineær analyse 1999V

Oppgave 1 (St.ass)

a: **[Young: 2.1]** Skal vise at $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ definerer en norm på l^∞.
N1: $x \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0 \Rightarrow \|x\|_\infty > 0$ OK.
N2: $\|\lambda x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\lambda x_n| = |\lambda|\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = |\lambda|\|x\|_\infty,\ \lambda \in \mathbb{C}$ OK.
N3: $\|x+y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ OK.

b: **[Young: Exercise 3.3]** Skal vise at l^∞ med supremumnormen er komplett.
Vi lar $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ være en Cauchy-følge i l^∞ og skal vise at følgen konvergerer.
For enhver $j \in \mathbb{N}$ er $|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| = \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty$.
Altså er $(x_j^{(n)})_{n=1}^\infty$ en Cauchy-følge i $\mathbb{C}$ for enhver $j \in \mathbb{N}$. Ettersom $\mathbb{C}$ er komplett vil det for enhver $j \in \mathbb{N}$ finnes en y_j s.a. $y_j = \lim_{n\to\infty} x_j^{(n)}$.
Må vise at $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in l^\infty$.
Ettersom $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ er Cauchy, vil det for gitt $\varepsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $m, n > N \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty < \varepsilon$.
Videre har vi at for $m, n > N$ $\sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}| < \varepsilon$. Lar så $m \to \infty$ og får at $\sup_{j\in\mathbb{N}}|y_j - x_j^{(n)}| < \varepsilon$ for $n > N$. Dermed er $y - x^{(n)} \in l^\infty$. Ettersom $x^{(n)} \in l^\infty$ og l^∞ er et vektorrom må $y \in l^\infty$.
Det som gjenstår er å vise at $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ konvergerer mot y i l^∞. Vi har allerede vist at for gitt $\varepsilon > 0$ finnes $n \in \mathbb{N}$ s.a. $n > N \Rightarrow \|y - x^{(n)}\| < \varepsilon$, og dette er definisjonen av konvergens.

c: Skal finne ut om supremumnormen er avledet fra et indreprodukt.
Vi vet at for normer avledet fra indreprodukt gjelder parallellogramloven:
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
Vi lar $x = (1, 0, \ldots)$ og $y = (0, 1, 0, \ldots)$, da får vi at:
$\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 1$ og
$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$
Ettersom $1 + 1 \neq 2(1+1)$ er ikke parallellogramloven oppfylt og supremumnormen kan ikke være avledet av et indreprodukt.

Oppgave 2 (St.ass)

a: $F : C[0,T] \to C[0,T]$ er gitt ved: $(Fx)(t) = \int_0^t e^{\tau - t} x(\tau)d\tau$, for $t \in [0,T]$, indreproduktet på $C[0,T]$ er gitt ved $\langle x, y\rangle = \int_0^T x(t)\overline{y(t)}dt$ og $B = \{x \in C[0,T] : \|x\| \leq 1\}$. Skal finne: $x_0 \in B$ slik at $|(Fx)(T)| \leq (Fx_0)(T)$ for alle $x \in B$.
Vi lar $y(t) = e^{t-T}$. Dermed har vi at $\langle x, y\rangle = (Fx)(T)$. Cauchy-Schwartz: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
Oppgaven er m.a.o. å finne en $x_0 \in B$ slik at vi får likhet i C-S. D.v.s. x_0 må være på form $x_0(t) = \lambda e^t$. Vi krever at x_0 skal ha norm 1:

$$1 = \|x_0\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt = |\lambda|^2 \int_0^T e^{2t} dt = \frac{1}{2}|\lambda|^2(e^{2T} - 1) \Rightarrow |\lambda|^2 = 2(e^{2T} - 1)^{-1}$$

Vi kan sette:

$$x_0(t) = [\frac{1}{2}(e^{2T} - 1)]^{-1/2} e^t$$

b: **[Young: 1.5]** Skal vise: $\|x+y\| = \|x\|+\|y\| \;\Rightarrow\; x$ eller y er en skalar multippel av den andre.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \\ (\|x\| + \|y\|)^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\end{aligned}$$

Må ha: $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$
men: $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$
Cauchy-Schwartz: $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x$ og y er lineært avhengige
$\Rightarrow x$ eller y er en skalar multippel av den andre.

Oppgave 3 (St.ass)

a: Lar E vere eit indreproduktrom. Skal vise Pythagoras lov. La $x, y \in E$, og anta $\langle x, y\rangle = 0$ Får då :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{0} + \underbrace{\overline{\langle x, y\rangle}}_{0} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

b: Skal vise at $y_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ er valgt slik at $x - y_0$ står vinkelrett på alle vektorer utspent av $e_1 \dots e_n$. (e_n er parvis ortonormale, dvs. $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ for m ulik n og 1 for m lik n). Ser fyrst på indreproduktet mellom $x - y_0$ og ein vilkårleg av enhetsvektorane e_k.

$$\begin{aligned}\langle x - y_0, e_k\rangle &= \langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j, e_k\rangle \\ &= \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle\langle x, e_j\rangle e_j, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle\langle e_j, e_k\rangle \\ &= \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \delta_{jk} = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0\end{aligned}$$

Om vi lar y vere ein vilkårleg lineærkombinasjon av e_j'ane. $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$.

$$\begin{aligned}\langle x - y_0, y\rangle &= \langle x - y_0, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x - y_0, y_k e_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{y_k}\langle x - y_0, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} (\overline{y_k} \cdot 0) = 0\end{aligned}$$

Skulle vidare vise at $\|x - y_0\| < \|x - y\|$ for alle $y \neq y_0$ i dette rommet. Dvs. at y_0 er den unike vektoren i rommet utspent av e'ane som ligg nermast x. Men av overståande kan vi nytte Pythagoras, og at $x - y_0$ er ortogonal til vektoren $y - y_0$ i rommet. Sidan $y \neq y_0$ vert $\|y - y_0\| > 0$.

$$\|x - y_0\|^2 = \|(x - y) + (y - y_0)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - y_0\|^2 < \|x - y\|^2$$
$$\|x - y_0\| < \|x - y\|$$

c: Skal finne vektoren utspent av $a = [1, 1, 1, 1]^T$ og $b = [1, i, -1, -i]^T$ som ligg nerast $x = [1, 2, 3, 4]^T$. Nyttar b), men må finne to *ortonormale* vektorar som spenner ut same rom som a og b. Ser at $\langle a, b\rangle = 1 - i - 1 + i = 0$. Det held difor å normalisere desse vektorane.

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{a}{||a||} = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T, \quad e_2 = \frac{b}{||b||} = \frac{1}{2}[1, i, -1, -i]^T \\
\langle x, e_1\rangle &= \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 5, \\
\langle x, e_2\rangle &= \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 2 \cdot (-i) + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot i) = -1 + i \\
y_0 &= \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 = \frac{5}{2}[1, 1, 1, 1]^T + \frac{-1 + i}{2}[1, i, -1, -i]^T \\
&= \frac{1}{2}[4 + i, 4 - i, 6 - i, 6 + i]^T
\end{aligned}$$

Oppgave 4 (St.ass)

a:

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$$

Skal vise: Ved Picard-iterasjon vil x_3 ha samme Taylorpolynom av 5. grad som den eksakte løsningen.
Iterasjonsskjema:

$$x_{k+1} = x_0 + \int_0^t (1 + x_k(\tau)^2)d\tau$$

Vi itererer i vei:

$$x_1(t) = \int_0^t d\tau = 1$$

$$x_2(t) = \int_0^t (1 + \tau^2)d\tau = t + \frac{1}{3}t^3$$

$$x_3(t) = \int_0^t (1 + (\tau + \frac{1}{3}\tau^3)^2)d\tau = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7$$

Eksakt løsning:

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_0^t dt \Rightarrow \text{arctan } x(t) = t \Rightarrow x(t) = \tan t$$

Rekkeutvikling av tangens:

$$\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \text{h.o.l.}$$

b:

$$\dot{x} = |x|^{1/2}, \quad x(0) = 0 \qquad (*)$$

Skal vise: $x_1(t) = 0$ og $x_2(t) = \frac{1}{4}t|t|$ løser $(*)$.
x_1 er opplagt løsning, vi ser på x_2 :

$$\dot{x_2}(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{for } t \geq 0 \\ -\frac{t}{2} & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

$$|x_2(t)|^{1/2} = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{for } t \geq 0 \\ -\frac{t}{2} & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$$

$$x_2(0) = 0$$

Bliss!
For at vi skal kunne bruke Picard-Lindelöf på problemet $\dot{x} = f(x,t),\ x(0) = x_0$ må f være Lipschitz-kontinuerlig i andre variabel i et område omkring $(0, x_0)$, d.v.s. at vi skal kunne finne en k slik at:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y| \quad \forall x,y,t$$

I vårt tilfelle:

$$||x|^{1/2} - |y|^{1/2}| \leq k|x-y| \quad \forall x,y,t$$

i et område omkring $(0,0)$
Setter $y = 0$:

$$k \geq |x|^{-1/2}$$

men høyresiden $\to \infty$ når $x \to 0$. Dermed oppfyller ikke funksjonen Lipschitz-kravet og Picard og Lindelöfs betraktninger blir irrelevante.
Alle funksjoner på formen

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-c_1)^2 & \text{for } t < c_1 \leq 0 \\ 0 & \text{for } c_1 \leq t \leq c_2 \\ \frac{1}{4}(t-c_2)^2 & \text{for } 0 \leq c_2 < t \end{cases}$$

løser $(*)$.

Oppgave 5 (St.ass)

a: Lar E vere et normert rom. Ser på begrensa lineæravbildingar A: $E \to E$. Lar $\mathscr{L}(E)$ vere mengden av alle slike avbildingar, og definerer ein norm på $\mathscr{L}(E)$ ved:

$$\|A\|_{\mathscr{L}(E)} = \sup\{\|Ax\|_E : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

Skal vise at dette definerer et normert rom.

1. $\mathscr{L}(E)$ er eit vektorrom. Dette fylgjer frå definisjon av linearitet, og er ikkje poenget med oppgåva.
2. $\|A\|_{\mathscr{L}(E)}$ definerer ein norm. Må vise at dei tre krava for normar er oppfylde.

   - $A \neq 0 \Rightarrow \|A\| > 0$:
     Om $A \neq 0$ finnes en vektor $x \in E$ slik at $Ax \neq 0$. La $y = x/\|x\|$. Da er $\|y\| = 1$ og $Ay \neq 0$, så $\|A\|_{\mathscr{L}(E)} \geq \|Ay\| > 0$.
   - $\|\alpha A\|_{\mathscr{L}(E)} = |\alpha|\|A\|_{\mathscr{L}(E)}$:
     $$\|\alpha A\|_{\mathscr{L}(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\|Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha|\|\alpha A\|_{\mathscr{L}(E)}.$$
   - $\|A+B\|_{\mathscr{L}(E)} \leq \|A\|_{\mathscr{L}(E)} + \|B\|_{\mathscr{L}(E)}$:
     $$\begin{aligned}\|A+B\|_{\mathscr{L}(E)} &= \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} |\|Bx\| = \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

Skal vidare vise ulikheten

$$\|Ax\|_E \leq \|A\|_{\mathscr{L}(E)} \cdot \|x\|_E$$

For å unngå å dele på null, deler vi inn i to tilfeller.

i) $x = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \|x\|_E = \|Ax\|_E = 0$
   $0 = \|Ax\|_E \leq \|A\|_{\mathscr{L}(E)} \cdot \|x\|_E = 0$

ii) $x \neq 0$. Lar $y = \frac{x}{\|x\|_E}$. Dette gjev $\|y\|_E = 1$.
   $\|Ax\| = \|A(\|x\|_E \cdot y)\|_E = \|(\|x\|_E \cdot Ay)\|_E = \|x\|_E \cdot \|Ay\|_E$
   $\leq \|x\|_E \cdot \sup\{\|Ay\|_E : y \in E, \|y\|_E = 1\} = \|x\|_E \cdot \|A\|_{\mathscr{L}(E)}$

b: Lar $E = \mathbb{C}^n$ med norm $\|z\|_\infty = \max_j |z_j|$. Ser på matrisemultiplikasjon som ei lineæravbilding. Lar A vere ei vilkårleg $n \times n-$matrise i $\mathbb{C}$. Skal vise at definisjonen i a) gjev :

$$\|A\| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Nyttar vanleg matrisemultiplikasjon, og finn at $Ax = (Ax_1, \dots, Ax_n)^T$ der

$$Ax_m = \sum_{k=1}^n a_{mk} x_k$$

Undersøker x-vektorar med norm lik 1, dvs. $|x_k| \leq 1$ for alle k.

$$|Ax_m| = \left|\sum_{k=1}^n a_{mk}x_k\right| \overset{\Delta-ulh}{\leq} \sum_{k=1}^n |a_{mk}x_k| = \sum_{k=1}^n |a_{mk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_{mk}| \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Sidan dette gjeld for alle m, har vi vist ulikhet. Klarar vi å vise at høgresida vert oppnådd for ein verdi på x, vil vi vere framme. La j^* vere den verdien på j som maksimerer summen. Vel x_k slik at ulikhetane vert likhet, dvs. prøver $x_k = \frac{\overline{a_{j^*k}}}{|a_{j^*k}|}$.

$$|Ax_{j^*}| = \left|\sum_{k=1}^n a_{j^*k}\frac{\overline{a_{j^*k}}}{|a_{j^*k}|}\right| = \left|\sum_{k=1}^n \frac{|a_{j^*k}|^2}{|a_{j^*k}|}\right| = \sum_{k=1}^n |a_{j^*k}| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

Løsningsforslag øving 4

75033 Lineær analyse 1999V

Oppgave 1 (B1)

a: [Young s. 11: Pr 1.3] Trigonometrisk polynom (TP):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Skal vise at

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

definerer et indreprodukt på TP.

Må først vise at dette er veldefinert, dvs at grenseverdien eksisterer for $f(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{i\lambda_n x}$, $g(x) = \sum_{m=1}^{l} b_m e^{i\lambda_m x}$:

$$\int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{k} a_n\overline{b_m} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n-\mu_m)x}\,dx$$

Men

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n-\mu_m)x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1\,dx = 1$$

dersom $\lambda_n = \mu_m$, og ellers er

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_n-\mu_m)x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \underbrace{\frac{1}{i(\lambda_n-\mu_m)}\left[e^{iT(\lambda_n-\mu_m)} - e^{-iT(\lambda_n-\mu_m)}\right]}_{\text{begrenset}} = 0.$$

Ser av dette at grensen eksisterer, så indreproduktet er veldefinert.

Må nå vise at $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oppfyller de 4 aksiomene:

(1)

$$\overline{\langle g, f\rangle} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{g(x)\overline{f(x)}}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{g(x)} f(x)\,dx = \langle f, g\rangle.$$

(2)

$$\langle \lambda f, g\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \lambda f(x)\overline{g(x)}\,dx = \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \lambda\langle f, g\rangle.$$

(3)

$$\begin{aligned}\langle f+h, g\rangle &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \big(f(x)+g(x)\big)\overline{g(x)}\,dx \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(x)\overline{g(x)}\,dx = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle.\end{aligned}$$

(4)

$$\langle f, f\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,dx > 0.$$

Alle kravene er oppfylt, så $\langle\cdot,\cdot\rangle$ er et indreprodukt.

b: **[Young s. 42: Pr 4.3]** Lar $f_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ for $\lambda, t \in \mathbb{R}$. For å vise at $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ er et ortonormalt system må vi vise at $\langle f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}\rangle$ er lik 1 når $\lambda_1 = \lambda_2$ og null ellers. Men dette var presis hva vi fant i punkt a (med λ_n og μ_m i stedet for λ_1 og λ_2, da vi viste at grensen i definisjonen av indreproduktet eksisterer).

Merknad: Beviset for det fjerde indreproduktaksiomet i a-punktet var litt kjapp: Alt regnestykket kan vise er $\langle f,f\rangle \geq 0$. Riktignok er integralet >0 når $f \neq 0$, men vi kunne likevel risikere at grensen blir 0. Men med $f(x) = \sum_{n=1}^k a_n e^{i\lambda_n x}$ viser jo den eksplisitte utregningen av $\langle f,g\rangle$ at $\langle f,f\rangle = \sum_{n=1}^k |a_n|^2 > 0$ dersom $f \neq 0$.

Gruppen hadde gjentatt regnestykket fra a-punktet i b, men jeg erstattet dette med en henvisning til det som alt var gjort. (Det er liksom en del av poenget med matematikk at man ikke trenger bevise samme resultat to ganger.)

Oppgave 2 (HH-O)

a: **[Young s. 42: Pr 4.6]** Vi viser ved induksjon på n at:
$\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_n\} = \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_n\}$, og $e_1,\ldots,e_n$ er ortonormale.

For $n=1$ er begge deler opplagte.

Vi antar så dette er vist for en gitt n. Siden $f_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle x_{n+1}, ej\rangle e_j$ og induksjonshypotesen medfører at $\sum_{j=1}^n \langle x_{n+1}, ej\rangle e_j \in \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_n\}$, er $f_{n+1} \in \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$, og da gjelder det også $e_{n+1} = f_{n+1}/\|f_{n+1}\|$, slik at $\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_{n+1}\} \subseteq \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$. På den annen side er jo også $x_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle x_{n+1}, ej\rangle e_j \in \mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_n,f_{n+1}\} = \mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$, så $\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_{n+1}\} \supseteq \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$, og de to rommene er like.

Vi finner også for $1 \leq k \leq n$: $\langle f_{n+1}, e_k\rangle = \langle x_{n+1}, e_k\rangle - \sum_{j=1}^n \langle x_{n+1}, e_j\rangle\langle e_j, e_k\rangle$ men etter induksjonsypotesen er $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$ slik at summen blir $\langle x_{n+1}, e_k\rangle$, og $\langle f_{n+1}, e_k\rangle = 0$. Så f_{n+1} er ortogonal på $e_1,\ldots,e_n$ og det samme gjelder da e_{n+1}. Siden $\|e_{n+1}\| = 1$ blir $e_1,\ldots,e_{n+1}$ ortonormale, og induksjonsbeviset er komplett.

Det følger av det vi har vist at $(e_n)_{n=1}^\infty$ er en ortonormal følge. Siden $\mathrm{lin}\{e_1,e_2,\ldots\}$ består av endelige lineærkombinasjoner (og tilsvarende for $\mathrm{lin}\{x_1,x_2,\ldots\}$), er $\mathrm{lin}\{e_1,e_2,\ldots\} = \mathrm{lin}\{x_1,x_2,\ldots\}$. Vi tar tillukning og konkluderer $\overline{\mathrm{lin}}\{e_1,e_2,\ldots\} = \overline{\mathrm{lin}}\{x_1,x_2,\ldots\}$.

b: **[Young s. 43: Pr 4.7]** Om vi holder oss til terminologien fra a-punktet, ser vi at dersom $g_1, g_2, \ldots$ er parvis ortogonale og $\mathrm{lin}\{g_1,\ldots,g_n\} = \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_n\}$ for alle n, er g_n et multiplum av e_n for alle n: for $\mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}^\perp \cap \mathrm{lin}\{e_1,\ldots,e_n\}$ er et endimensjonalt rom med basis e_n, og g_n tilhører også dette rommet.

Vi trenger altså bare å vise at $\mathrm{lin}\{P_j : 0 \leq j \leq n\} = \mathrm{lin}\{x^j : 0 \leq j \leq n\}$ for $j = 0,1,2$ og at P_0, P_1, P_2 er ortogonale. Den første påstanden er åpenbar. For å sjekke den andre påstanden må vi vise at $\int_{-1}^1 P_j(x)\overline{P_k(x)}\,dx = 0$ for $0 \leq j < k \leq 2$. For $(j,k) = (0,1)$ eller $(j,k) = (1,2)$ er dette opplagt, fordi P_jP_k da er polynomer med bare ledd av odde grad, så det er bare tilfellet $(j,k) = (0,2)$ som trenger å sjekkes:

$$\langle P_0, P_2\rangle = \int_{-1}^1 P_0(x)\overline{P_2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (3x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\Big[x^3 - x\Big]_{-1}^1 = 0.$$

Kvadratet av den minste avstanden blir dermed (ved Pythagoras)

$$\|x^3 - Q(x)\|^2 = \|x^3\|^2 - \|Q(x)\|^2 = \int_{-1}^1 x^6\,dx - \frac{9}{25}\int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}.$$

c: **[Young s. 43: Pr 4.9]** Oppgaven går ut på å bestemme minimum for $\|x^3 - Q(x)\|^2$ der $Q \in \text{lin}\{1, x, x^2\} = \text{lin}\{P_0, P_1, P_2\}$. Vi vet at dette uttrykket minimeres når Q er ortogonal-projeksjonen av x^3 i $\text{lin}\{P_0, P_1, P_2\}$, altså

$$Q(x) = \frac{\langle x^3, P_0\rangle}{\|P_0\|^2} P_0(x) + \frac{\langle x^3, P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1(x) + \frac{\langle x^3, P_2\rangle}{\|P_2\|^2} P_2(x).$$

Men siden x^3 er odde og P_0 og P_2 er like, er første og tredje ledd null, så vi står igjen med

$$Q(x) = \frac{\langle x^3, P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^4\,dx}{\int_{-1}^1 x^2\,dx} x = \frac{3}{5} x.$$

Oppgave 3 (A3)

a: **[Young s. 16: Ex 2.8]** Skal vise at $F = \{f \in C[0,1] \colon f(0) = 0\}$ er et underrom av $C[0,1]$ som ikke er lukket med hensyn på indreproduktet $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

Vi betrakter følgen $y_n = \{\min(nx, 1)\}_{n=1}^\infty$. Velger så $y = 1$ og ser på

$$\begin{aligned}\|y_n - y\|^2 = \langle y_n - y, y_n - y\rangle &= \int_0^1 (y_n - y)\overline{(y_n - y)}\,dt \\ &= \int_0^{1/n} (nt-1)^2\,dt + \int_{1/n}^1 (1-1)\,dt = \int_0^{1/n} \big[(nt)^2 - 2nt + 1\big]\,dt = \frac{1}{3n}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$, så $\lim_{n\to\infty} y_n = y = 1$. Dermed er F ikke lukket (siden $y_n \in F$ men $y \notin F$).

b: **[Young s. 11: Pr 1.2]** Skal vise at $W[a,b]$ ($a < b,\ \in \mathbb{R}$) er et indreproduktrom når

$$\langle f, g\rangle_W = \int_a^b \big[f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt.$$

(i)

$$\overline{\langle g, f\rangle_W} = \int_a^b \overline{g(t)\overline{f(t)}}\,dt + \int_a^b \overline{g'(t)\overline{f'(t)}}\,dt = \int_a^b \big[f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt = \langle f, g\rangle_W$$

(ii)

$$\langle \lambda f, g\rangle_W = \int_a^b \big[\lambda f(t)\overline{g(t)} + \lambda f'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt = \lambda \int_a^b \big[f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt = \lambda\langle f, g\rangle_W$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle f + h, g\rangle_W &= \int_a^b \big[\big(f(t) + h(t)\big)\overline{g(t)} + \big(f'(t) + h'(t)\big)\overline{g'(t)}\big]\,dt \\ &= \int_a^b \big[f(t)\overline{g(t)} + h(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)} + h'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt \\ &= \int_a^b \big[f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt + \int_a^b \big[h(t)\overline{g(t)} + h'(t)\overline{g'(t)}\big]\,dt \\ &= \langle \lambda f, g\rangle_W + \langle \lambda h, g\rangle_W\end{aligned}$$

(iv)

$$\langle f, f\rangle_W = \int_a^b \left[f(t)\overline{f(t)} + f'(t)\overline{f'(t)}\right] dt = \int_a^b \left[|f(t)|^2 + |f'(t)|^2\right] dt > 0$$

dersom $a < b$ og $f \neq 0$.

c: **[Young s. 19: Pr 2.11]** Skal vise at i $W[0,1]$ er $\langle f, \cosh\rangle_W = f(1)\sinh 1$:

$$\langle f, \cosh\rangle_W = \int_0^1 \left[f(t)\overline{\cosh t} + f'(t)\overline{\sinh t}\right] dt$$

Benytter delvis integrasjon, og at $\overline{\cosh t} = \cosh t$ og $\overline{\sinh t} = \sinh t$:

$$\langle f, \cosh\rangle_W = \left[f(t)\sinh t\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\sinh t\, dt + \int_0^1 f'(t)\sinh t\, dt = f(1)\sinh 1$$

da $\sinh 0 = 0$.

Skal vise at $\{f \in W[0,1] \colon f(1) = 0\}$ er et lukket underrom av $W[0,1]$: Velger $E = \{\cosh\}$:

$$E^\perp = \{f \colon \langle f, \cosh\rangle = 0\} = \{f \colon f(1)\sinh 1 = 0\}$$

Dette er ved hjelp av teorem 4.22 et lukket underrom av $W[0,1]$.

Merknad: a-punktet illustrerer tydelig at L^2–konvergens ikke medfører punktvis konvergens: For selv om $y_n \to y$ i L^2 har vi $y_n(0) = 0 \to 0 \neq 1 = y(0)$.

Oppgave 4 (B2)

a: Viser først at $\|u+v\|^2 \geq (1-\gamma)(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. La $u \in U$ og $v \in V$:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2|\langle u,v\rangle| \\ &\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\gamma\|u\|\cdot\|v\| \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - \gamma(\|u\|^2 + \|v\|^2) \\ &= (1-\gamma)(\|u\|^2 + \|v\|^2).\end{aligned}$$

La så $(u_n + v_n)_{n=1}^\infty$ være konvergent der $u_n \in U$ og $v_n \in V$. Da må $(u_n + v_n)$ være Cauchy. Dvs: For enhver $\varepsilon > 0$ fins N s.a. for $m, n \geq N$ er

$$\|u_n + v_n - u_m - v_m\| < \varepsilon.$$

Dette leder så til

$$(1-\gamma)(\|u_n - u_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2) < \varepsilon^2$$

og dermed

$$\|u_n - u_m\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{1-\gamma} - \|v_n - v_m\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{1-\gamma}$$

for $m, n \geq N$, som viser at $(u_n)_{n=1}^\infty$ er Cauchy. Siden U er et lukket underrom av et Hilbertrom er U komplett, så $(u_n)_{n=1}^\infty$ er konvergent i U. Av samme grunn er $(v_n)_{n=1}^\infty$ konvergent i V, og vi finner $\lim_{n\to\infty} u_n \in U$ og $\lim_{n\to\infty} v_n \in V$ (det er *eksistensen* av disse grensene som er ikketriviell, ikke det faktum at de ligger i henholdsvis U og V). Altså er

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n \in U + V$$

som viser at $U+V$ er lukket.

b: Viser først at $\alpha_k e_{2k-1}+\beta_k e_{2k}$ danner en ortonormal følge:

$$\begin{aligned}&\langle \alpha_k e_{2k-1}+\beta_k e_{2k}, \alpha_m e_{2m-1}+\beta_m e_{2m}\rangle\\ &\qquad= \alpha_k\overline{\alpha_m}\langle e_{2k-1},e_{2m-1}\rangle+\beta_k\overline{\beta_m}\langle e_{2k},e_{2m}\rangle+\alpha_k\overline{\beta_m}\underbrace{\langle e_{2k-1},e_{2m}\rangle}_{=0}+\beta_k\overline{\alpha_k}\underbrace{\langle e_{2k},e_{2m-1}\rangle}_{=0}\\ &\qquad=\begin{cases}0 & m\neq k\\ \underbrace{\alpha_k^2+\beta_k^2}_{=1} & m=k\end{cases}\end{aligned}$$

Teorem 4.15 gir da at siden $\overline{\mathrm{lin}}\{\alpha_k e_{2k-1}+\beta_k e_{2k}\colon k=1,2,3,\dots\}=V$ må $(\alpha_k e_{2k-1}+\beta_k e_{2k})_{k=1}^{\infty}$ være komplett for V. Likeledes er $(e_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ komplett for U.

La $u\in U\cap V$. Da er

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\alpha_k e_{2k-1}+\beta_k e_{2k}).$$

Siden $u\in U$ er også $\langle u,e_{2n}\rangle=0$ for alle n, så

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k\alpha_k\underbrace{\langle e_{2k-1},e_{2n}\rangle}_{=0}+c_k\beta_k\underbrace{\langle e_{2k},e_{2n}\rangle}_{=\delta_{kn}})=c_n\beta_n$$

slik at $c_n=0$, siden $\beta_n>0$. Altså er $u=0$, dvs $U\cap V=\{0\}$.

c: Viser først at

$$\overline{U+V}=\overline{\mathrm{lin}}\{e_1,e_2,\dots\}.$$

Det er opplagt at

$$\overline{U+V}\subseteq\overline{\mathrm{lin}}\{e_1,e_2,\dots\}$$

siden det bare er $e_1,e_2,\dots$ som inngår i U og V.

La $z\in\mathrm{lin}\{e_1,e_2,\dots\}$: Vi kan skrive

$$z=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i=\sum_{i=1}^{n}\Big(c_i-c_i\frac{\alpha_i}{\beta_i}\Big)e_{2i-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\beta_i}(\alpha_ie_{2i-1}+\beta_ie_{2i})$$

dvs $z\in U+V\subseteq\overline{U+V}$. Så $\overline{U+V}\supseteq\mathrm{lin}\{e_1,e_2,\dots\}$, og derfor også $\overline{U+V}\supseteq\overline{\mathrm{lin}}\{e_1,e_2,\dots\}$, slik at $\overline{U+V}=\overline{\mathrm{lin}}\{e_1,e_2,\dots\}$.

Viser så at ulikheten i hintet. Siden $w=u+v$ med $u\in U$ og $v\in V$ og $\langle u,e_{2k}\rangle=0$ holder det å vise at

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\langle v,e_{2k}\rangle|}{\beta_k^2}<\infty\quad\forall v\in V.$$

$$\begin{aligned}v\in V\Rightarrow v&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle v,\alpha_ne_{2n-1}+\beta_ne_{2n}\rangle\cdot(\alpha_ne_{2n-1}+\beta_ne_{2n})\\ \Rightarrow\langle v,e_{2k}\rangle&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle v,\alpha_ne_{2n-1}+\beta_ne_{2n}\rangle\cdot\beta_n\delta_{nk}\\ &=\langle v,\alpha_ke_{2k-1}+\beta_ke_{2k}\rangle\beta_k\end{aligned}$$

og dermed

$$\infty > \|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, \alpha_k e_{2k-1} + \beta_k e_{2k}\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_{2k}\rangle|}{\beta_k^2}.$$

La nå $w = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_{2k}$. Vi vet at summen konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty$. Velg $\beta_k = 1/k$. Fra det ovenstående er det klart at $w \in \overline{U+V}$. Men

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle w, e_{2k}\rangle|^2}{\beta_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{\beta_k^2} = \infty$$

som viser at $w \notin U + V$. Dermed er $U + V$ ikke lukket.

Merknad: Dette løsningsforslaget var meget bra rent matematisk, men jeg har tillatt meg å redigere det en del med hensyn på fremstillingen. Jeg har også rettet en liten matematisk feil i starten av punkt c: Gruppen hadde gått direkte løs på en $z \in \operatorname{lin}\{e_1, e_2, \dots\}$, men dette krever en uendelig sum $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, og man er da ikke garantert at de to neste summene konvergerer, siden α_i/β_i og/eller β_i/α_i kan være ubegrenset store.

Oppgave 5 (B3)

a: $u_1, \dots, u_n$ er lineært uavhengige vektorer i et indreproduktrom H. Skal vise $n \times n$–matrisen med elementer $g_{jk} = \langle u_j, u_k\rangle$ er positivt definit. G positivt definit vil si at $\bar{x}^{\mathrm{T}} G x > 0$ for alle $x \in \mathbb{C}^n$ med $x \neq 0$. Vi har:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \dots & \langle u_1, u_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1\rangle & \dots & \langle u_n, u_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\langle u_1, u_1\rangle + \dots + x_n\langle u_1, u_n\rangle \\ \vdots \\ x_1\langle u_n, u_1\rangle + \dots + x_n\langle u_n, u_n\rangle \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \langle u_i, u_k\rangle x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \bar{x}_i u_i, \bar{x}_k u_k\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i u_i, \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k u_k \Big\rangle = \langle a, a\rangle > 0$$

når $a = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k u_k \neq 0$. Vi har $a \neq 0$ når $x \neq 0$, fordi $u_1, \dots, u_n$ er lineært uavhengige. Dette viser at matrisen er positivt definit.

b: $y \in H$. Skal vise at vektoren i $\operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_n\}$ som er nærmest y er $\sum_{j=1}^{n} c_j u_j$ der skalarene c_j oppfyller ligningssystemet

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, u_k\rangle = \langle y, u_k\rangle \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Vi kan skrive vektoren som er nærmest y som: $\tilde{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$. Samtidig har vi

$$\langle y - \tilde{y}, u_j\rangle = 0$$

hvorav

$$\langle y, u_i\rangle = \langle \tilde{y}, u_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, u_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, u_i\rangle.$$

Merknad: Påstanden $\langle y - \tilde{y}, u_j\rangle = 0$ som ble brukt krever en begrunnelse: Den er kort og godt at vi vet at $y - \tilde{y} \in M^{\perp}$ der $M = \operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_n\}$ (se f.eks. beviset for Thm 4.24 side 40 i Young).

Løsningsforslag øving 5

75033 Lineær analyse 1999V

Oppgave 1 (A5)

Skal finne f s.a. :

i) $\langle f, g_i \rangle = c_i, \quad i = 1, \dots, n$

ii) $\|f\|$ minst mulig

$f_1,\ f_2$ oppfyller i) $\Rightarrow \langle f_1 - f_2, g_i \rangle = 0$. Om $F = \text{lin}\{g_1, \dots, g_n\}$ så betyr dette at

$$(f_1 - f_2) \perp F$$

Dersom $f_1,\ f_2$ oppfyller i) og $f_1 \in F$, er

$$\begin{aligned} \|f_2\|^2 &= \|f_2 - f_1\|^2 + \|f_1\|^2 \quad \text{(fra Pytagoras)} \\ &\Rightarrow \|f_2\| \geq \|f_1| \end{aligned}$$

Prøver med $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle g_j, g_k \rangle = c_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$A\lambda = c, \quad A_{jk} = \langle g_k, g_j \rangle \quad \text{(positiv definitt)}$$

$$\begin{aligned} &(x \in \mathbb{C}) \\ &x^H A x = \sum_{j,k} \bar{x_j} A_{jk} x_k = \sum_{j,k} \bar{x_j} \langle g_k, g_j \rangle x_k \\ &\quad = \sum_{j,k} \langle x_k g_k, x_j g_j \rangle = \langle \sum_k x_k g_k, \sum_j x_j g_j \rangle \\ &\quad = \| \sum_k x_k g_k \|^2 > 0 \end{aligned}$$

når $x \neq 0$ fordi $g_1, \dots, g_n$ er lin.uavh. Så A vert invertibel.

Oppgave 2 (B1)

$$\operatorname{tr} A = \sum_j a_{jj} = \sum_j \langle Ae_j, e_j \rangle$$

lineærfunksjonal på $\mathbb{C}^{n\times n}$

$$\| \operatorname{tr} \| \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{ |\operatorname{tr} A|, A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \|A\| \leq 1\}$$

a: $\mathbb{C}^{n\times n}$ er utstyrt med normen $\|A\| = \sqrt{\sum_{j,k} |a_{jk}|^2}$. $\mathbb{C}^{n\times n}$ er i så fall et indreproduktrom med indreprodukt gitt ved:

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^* A) \qquad (*)$$

Riesz-Frêchet gir oss at de finnes nøyaktig ein B slik at:

$$\operatorname{tr} A = \langle A, B\rangle$$
$$\|\operatorname{tr}\| = \|B\|$$

Fra (*) ser vi da at vi må velge $B = I$ og vi får

$$\|\operatorname{tr}\| = \|I\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n}$$

b: $\mathbb{C}^{n\times n}$ er utstyrt med normen $\|A\| = \max_j \sum_k |a_{jk}|$. Ser på ei matrise A med $\|A\| \leq 1$.

$$\sum_k |a_{jk}| \leq 1 \quad \forall j$$
$$\Rightarrow |a_{jj}| \leq 1 \quad \forall j$$
$$|\operatorname{tr} A| = |\sum_j a_{jj}| \leq \sum_j |a_{jj}| \leq n$$

Får likhet i siste steg om vi velger $|a_{jj}| = 1$, og likhet i første ulikhet ved å velge $a_{jj} = 1$. Dvs. dersom $A = I$ er $|\operatorname{tr} A| = n$ som er den øvre grensa for $|\operatorname{tr} A|$.
Dermed er $\underline{\underline{\|\operatorname{tr}\| = n}}$.

c:

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq 1\}$$

Velger matrise A med $\|A\| \leq 1$.

$$|\operatorname{tr} A| = |\sum_{j=1}^{n} \langle Ae_j, e_j\rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle Ae_j, e_j\rangle|$$
$$\overset{\text{C-S}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\|Ae_j\|}_{\leq\|A\|}\underbrace{\|e_j\|}_{=1} \leq \sum_{j=1}^{n} \|A\| \leq n$$

Velger vi $A = I$ får vi $|\operatorname{tr}\ I| = n$ dvs. $\underline{\underline{\|\operatorname{tr}\| = n}}$

Oppgave 3 [Young s. 84: Pr 7.7] (C1)

La D være rommet av deriverbare funskjoner f i $L^2(-\infty, \infty)$ slik at f' også er i $L^2(-\infty, \infty)$. Skal vise at derivasjonsoperatoren:

$$F = \frac{d}{dx} : \ D \to L^2(-\infty, \infty)$$

(i) ikke er begrenset mhp. L^2-normen, men (ii) er begrenset mhp. indreproduktet:

$$\langle f, g\rangle_D = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}]dt$$

(i) Viser dette ved å finne en følge av funskjoner f_n slik at $\|f_n\|$ er begrenset mens $\|f_n'\| \to \infty$ når $n \to \infty$.
Velger funksjoner som ligner en standard normalfordeling:

$$f_n(t) = e^{-(nt)^2}$$

Har da at:

$$\|f_n\|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2n^2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \forall n$$

mens

$$\|f_n'\|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Dermed kan det ikke finnes noen M slik at

$$\|Ff_n\| \leq M\|f_n\| \ \forall n$$

og følgelig er operatoren ikke begrenset. qed.

(ii)

$$\|f\|_D^2 = \int_{-\infty}^{\infty}[|f(t)|^2 + |f'(t)|^2]dt = \|f\|_{L^2}^2 + \|Ff\|_{L^2}^2 \Rightarrow \|Ff\|_{L^2} \leq \|f\|_D \qquad \forall f \in D$$

ergo er operatoren begrenset mhp. indreproduktet på D.qed

Merknad: Her er et ekstra elegant bevis for at derivasjon er ubegrenset, nesten helt uten eksplisitt regning: La φ være en hvilken som helst deriverbar funksjon slik at φ og φ' begge tilhører $L^2(-\infty,\infty)$ (og er forskjellig fra null). Dersom vi lar $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$ finner vi $\varphi_n'(t) = n\varphi(nt)$. Substitusjonen $t = s/n$ gir oss

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(nt)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(s)|^2\,\frac{ds}{n} = \frac{1}{n}\|\varphi\|^2,$$
$$\|\varphi_n'\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |n\varphi'(nt)|^2\,dt = n^2\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(s)|^2\,\frac{ds}{n} = n\|\varphi'\|^2$$

som gir $\|\varphi_n'\|/\|\varphi_n\| = Cn$ for en konstant C. La så $n \longrightarrow \infty$.

Oppgave 4 [Young s. 84: 7.8] (A3)

Volterra-operatoren V på $L^2(0,1)$:

$$(Vx)(t) = \int_0^t x(s)ds \ , \ \ 0 < t < 1$$

Vi skal vise at V er en begrenset lineær operator og at $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ser først på rommet $L^2(0,t)$, der $0 < t < 1$:

$$\langle x, 1\rangle_{L^2(0,t)} = \int_0^t x(s)ds = (Vx)(t)$$

$$|(Vx)(t)| = |\langle x,1\rangle_{L^2(0,t)}| \leq \|x\|_{L^2(0,t)} \cdot \|1\|_{L^2(0,t)} = \|x\|_{L^2(0,t)} \cdot \sqrt{\int_0^t 1^2\,dt} \leq \|x\|_{L^2(0,1)} \cdot \sqrt{t}$$

$$\|Vx\|^2 = \int_0^1 |(Vx)(t)|^2\,dt \leq \|x\|_{L^2(0,1)}^2 \int_0^1 t\,dt = \|x\|_{L^2(0,1)}^2 [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = \|x\|_{L^2(0,1)}^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \|Vx\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|$$

Dermed er $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ og V er begrenset.

Oppgave 5 [Young s. 85: Pr 7.15] (A4)

Skal vise at:

$$(V^n x)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^n}{(n-1)!} \cdot x(s)\, ds$$
$$\text{når } (Vx)(t) = \int_0^t x(s)\, ds$$

Induksjon

$\underline{n=1}$:

$$(Vx)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^0}{0!} \cdot x(s)\, ds = \int_0^t x(s)\, ds \quad \text{Stemmer.}$$

Anta at ligningen holder for $n = k$ og la $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
(V^{k+1}x)(t) = V\left[(V^k x)\right](t) &= \int_0^t \int_0^\tau \frac{(\tau - s)^{k-1}}{(k-1)!} x(s)\, ds\, d\tau \\
&= \int_0^t \int_s^t \frac{(\tau - s)^{k-1}}{(k-1)!} x(s)\, d\tau\, ds \\
&= \int_0^t \int_0^{t-s} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} x(s)\, du\, ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^k}{k!} x(s)\, ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{(k+1)-1}}{[(k+1)-1]!} x(s)\, ds
\end{aligned}$$

Stemmer!

Skal nå løse:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin t + \int_0^t f(s)\, ds = \sin t + (Vf)(t) \\
\Rightarrow (I - V)f(t) &= \sin t \\
\|V\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow (I - V) \text{ er invertibel} \\
\Rightarrow f(t) &= (I-V)^{-1} \sin t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} V^k\right) \sin t = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} V^k\right) \sin t \\
&= \sin t + \sum_{k=1}^{\infty} V^k \sin t = \sin t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \sin s\, ds\right) \\
&= \sin t + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \sin s\right) ds \\
&= \underline{\underline{\sin t + \int_0^t e^{t-s} \cdot \sin s\, ds}}
\end{aligned}$$

Merknad: Banachromteorien forteller oss at $(I-V)^{-1}=\sum_k V^k$. Men denne rekken konvergerer i operatornorm, og det følger at rekken $\sum_k V^k \sin$ konvergerer mot $(I-V)^{-1}\sin$. Men denne konvergensen er L^2–konvergens, og løsningen foran beregner en *punktvis* grense: $\sum_k (V^k \sin)(t)$. Men vi vet at punktvis konvergens og L^2–konvergens er to forskjellige ting: Det finnes følger som konvergerer punktvis men ikke i L^2, og det finnes følger som konvergerer i L^2 men ikke punktvis.

I besvarelsen blir en uendelig sum og et integral byttet om. Er dette lovlig? Svaret i dette tilfellet blir ja, for rekken $\sum_k t^k/k!$ konvergerer mot e^t *uniformt* for $t\in[0,1]$. (Det vil si at følgen av delsummer konvergerer uniformt, som er lett å se takket være $k!$ i nevneren.)

Så $\sum_k V^k \sin$ konvergerer både i L^2 (i følge teorien) og punktvis (i følge argumentet ovenfor). Kunne det tenkes at de to sortene grenser kunne være to forskjellige funksjoner? Heldigvis er svaret nei, men vi har ikke nok integrasjonsteoretisk bakgrunn til å kunne vite dette sikkert. Så skal vi være helt pedantiske bør vi estimere L^2–normen til differensen mellom grensen og en delsum:

$$\int_0^1 \Big| \int_0^t e^{t-s}\sin s\,ds - \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-s)^k}{k!}\sin s\,ds \Big|^2 dt = \int_0^1 \Big| \int_0^t \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(t-s)^k}{k!}\sin s\,ds \Big|^2 dt$$

Nok en gang kommer uniform konvergens til vår redning: Dersom $\varepsilon>0$ er det bare å velge n så stor at $\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k! < \varepsilon$. Da blir integranden i det innerste integralet på høyre side $<\varepsilon$, og vi ender med at hele integralet er mindre enn ε.

For øvrig kan jeg legge til at et par delvis-integrasjoner gir

$$f(t)=\frac{1}{2}\big(e^t+\sin t-\cos t\big)$$

(om jeg ikke har regnet feil).

Løsningsforslag øving 6

75033 Lineær analyse 1999V

Oppgave 1 ()

$K: \ L^2(-\pi,\pi) \to L^2(-\pi,\pi)$ er gitt ved:

$$(Kx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+s)x(s)\,ds$$

a: Skal vise at $e_n, \ n \geq 0$ der $e_{2n}(t) = \cos nt, \ n \geq 0$ og $e_{2n-1}(t) = \sin nt, \ n \geq 1$ er egenvektorer til K

$$\begin{aligned}
(Ke_{2n})(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+s)\ \cos ns\,ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t\ \cos s - \sin t\ \sin s)\cos ns\,ds \\
&= \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s\ \cos ns\,ds \\
&= \begin{cases} \pi\cos t & \text{for } n = 1 \\ 0 & \text{for } n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Ke_{2n-1})(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+s)\ \sin ns\,ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t\ \cos s - \sin t\ \sin s)\sin ns\,ds \\
&= -\sin t \int_{-\pi}^{\pi} \sin s\ \sin ns\,ds \\
&= \begin{cases} -\pi\sin t & \text{for } n = 1 \\ 0 & \text{for } n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vi ser at for alle $n \geq 0$ gjelder at $Ke_n = \lambda_n e_n$, følgelig er e_n egenvektorer med egenverdier:

$$\lambda_n = \begin{cases} -\pi & \text{for } n = 1 \\ \pi & \text{for } n = 2 \\ 0 & \text{for } n \neq 1, 2. \end{cases}$$

b: Vi skal finne ut hvilke funksjoner $y \in L^2(-\pi,\pi)$ som gjør at ligningen $Kx = y$ har løsning i $L^2(-\pi,\pi)$. Ettersom $(e_n)_0^\infty$ er en ortonormal basis for dette rommet (Young, Teorem 5.1) kan vi skrive

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$$

Ved hjelp av resultatet i a) får vi at

$$\begin{aligned}
Kx &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n K e_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n e_n \\
&= \pi(c_2 e_2 - c_1 e_1)
\end{aligned}$$

Dermed har ligningen bare løsning for $y \in \text{span}\{e_1, e_2\}$, d.v.s. $y(t) = A\cos t + B\sin t$. Løsningsmengden for gitt $y \in \text{span}\{e_1, e_2\}$ blir:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$$

der c_1 og c_2 er entydig bestemt fra y, mens de andre konstantene kan velges fritt.

Oppgave 2 ()

Operatoren $D: \ \ell^2 \to \ell^2$ er gitt ved:

$$D(x_1, x_2, .., x_n, ...) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, .., \frac{1}{n}x_n, ...)$$

Vi skal finne (i) egenverdiene og (ii) spekteret til D.

(i):

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ er egenverdi til } D \Leftrightarrow x_n(\frac{1}{n} - \lambda) = 0 \ \forall n \geq 1$$

Må ha $x_n \neq 0$ for minst en n, dermed må $\lambda_n = \frac{1}{n}$, egenvektoren blir da $e^{(n)} = (0, 0, .., 0, 1, 0...)$.

(ii): Vet at alle egenverdiene er inneholdt i spekteret. Ettersom spekteret (Young: Teorem 7.22) er lukket, må tillukningen til egenverdiene være inneholdt i spekteret:

$$\sigma(D) \supseteq \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}} = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

La nå $\mu \notin \overline{\{\frac{1}{n} : n \geq 1\}}$. Vi ønsker nå å vise at $\mu \notin \sigma(D)$ ved å vise at $(\mu I - D)$ er invertibel. La $(\mu I - D)x = y$

$$\Rightarrow x_n(\mu - \frac{1}{n}) = y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\mu - \frac{1}{n}}.$$

Dersom operatoren A gitt ved $Ay = x$ er begrenset vil $A = (\mu I - D)^{-1}$. Ettersom $\mu \notin \overline{\{\frac{1}{n} : n \geq 1\}}$ vet vi at det finnes en $\delta > 0$ slik at $|\mu - \frac{1}{n}| > \delta$ for alle $n \geq 1$. Dermed har vi at $|Ay_n| = |x_n| < \frac{1}{\delta}$ for alle $n \geq 1$.

$$\|Ay\|^2 = \|x\|^2 < \frac{1}{\delta^2}\|y\|^2$$

Altså er A begrenset og $(\mu I - D)$ invertibel, følgelig er $\mu \notin \sigma(D)$. Dermed har vi at

$$\sigma(D) = \overline{\left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}} = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

Oppgave 3 (C1)

a): Etter teorem 8.2 er Hilbert-Schmidt operatorer kompakte.
Hilbert-Schmidt : det eksisterer en komplett ortonormal sekvens $(e_n)_1^\infty$ slik at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|De_n\|^2 < \infty$$

For alle $x \in \ell^2$ gjelder det at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

Hvis vi velger $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ med 1 på n-te plass, får vi at D er en Hilbert-Schmidt operator.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|De_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{n} e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Dvs. $\underline{\underline{D \text{ er kompakt}}}$

b): [Young s. 102: Pr 8.2]

i): Påstand : AB er kompakt $\Rightarrow$ enten A eller B er kompakte.
FEIL! Bevis vha. moteksempel:
La $x = (x1, x2, \cdots) \in \ell^2$. Definer

$$Ax = (\frac{1}{1} x_1, x_2, \frac{1}{3} x_3, x_4, \dots)$$
$$Bx = (x_1, \frac{1}{2} x_2, x_3, \frac{1}{4} x_4, \dots)$$

Det gir

$$ABx = (x_1, \frac{1}{2} x_2, \frac{1}{3} x_3, \frac{1}{4} x_4, \dots, \frac{1}{n} x_n, \dots)$$

Som vi viste var kompakt i oppgave 3 a).
MEN: hverken A eller B er kompakte hver for seg.

ii): $A^2 = 0$ da er A kompakt.
FEIL! Betrakter en A definert ved

$$Ax = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots)$$
$$A^2 x = (0, 0, 0, \dots)$$

Så $(A^2 x_n)_{n=1}^{\infty}$ er konvergent (til null), så A^2 er kompakt, men A er det ikke.

iii): $A^n = I$ for en eller annen $n \in \mathbb{N}$, da er A ikke kompakt.
KORREKT!
Fordi hvis A er kompakt, vil A^2 vere det og A^3 igjen osv. Vet at I ikke er kompakt, og da kan heller ikke A^n være det.
Og når A^n ikke er kompakt, kan ikke A være det som forklart over.

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Skulle bevise} & A \Rightarrow B & \\ \text{Viste heller} & \neg B \Rightarrow \neg A & \text{som er ekvivalent.} \end{array} \right)$$

Merknad: Siste delen av b) ii) er kanskje formulert litt knapt, slik at leseren kan forvirres: Det burde stå at for enhver begrenset følge (x_n) er $A^2 x_n = 0$, slik at A^2 (det vil si nulloperatoren) er kompakt, for en følge av nuller er helt klart konvergent. x_n i dette argumentet er ubeslektet med x_n to linjer over, så kanskje burde en annen bokstav vært brukt ett av stedene.

Det er også verdt å merke seg at ii) faktisk også gir et moteksempel på i), med $B = A$.

Oppgave 4 (A4)

a: **[Young s. 86: 7.25]** Skal vise at den adjungerte til skiftoperatoren S på ℓ^2 er baklengsskiftoperatoren S_B gitt ved

$$S_B(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

La $x, y \in \ell^2$:

$$\langle Sx, y\rangle = \sum_{i=2}^{\infty} x_{i-1}\overline{y_i} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_{j+1}} = \langle x, S_B y\rangle$$

Dermed er $S_B = S^*$. qed.

b: **[Young s. 87 7.35]** Skal vise at alle $\lambda \in \mathbb{D}$, den åpne enhetsdisken er egenverdier til S^* på ℓ^2. La $\lambda \in \mathbb{D}$, da er $x = (1, \lambda, \lambda^2, ...) \in \ell^2$ fordi $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^2|^n < \infty$. Videre er $S^*x = \lambda x$ d.v.s. λ er egenverdi.qed.

Skal så vise at $\sigma(S^*) = \text{clos}(\mathbb{D})$.
Teorem 7.22 sier at $\sigma(S^*)$ er inneholdt i den lukkede disken med sentrum i origo og radius $\|S^*\|$, og videre at $\sigma(S^*)$ er kompakt. I tillegg vet vi at alle egenverdiene er inneholdt i spektret.

$$\mathbb{D} \subseteq \sigma(S^*) \underset{\text{kompakthet}}{\Rightarrow} \text{clos}(\mathbb{D}) \subseteq \sigma(S^*)$$
$$\|S^*\| = 1 \;\Rightarrow\; \sigma(S^*) \subseteq \text{clos}(\mathbb{D})$$

Dermed har vi at $\sigma(S^*) = \text{clos}(\mathbb{D})$.qed.

Merknad: Jeg har byttet ut symbolet $\in$ med $\subseteq$ i de to uthevede formlene over. Resonnementet var riktig, men notasjonen var feil på slutten: $\mathbb{D}$ er ikke et *element* i $\sigma(S^*)$, men en *delmengde* (som betyr at alle elementer i $\mathbb{D}$ tilhører $\sigma(S^*)$).

Oppgave 5 (B3)

a: **[Young s. 103: 8.5]** Lar $(e_n)_1^\infty, (f_m)_1^\infty$ være komplette ortonormale sekvenser i Hilbertrom H, K og la $A \in \mathcal{L}(H, K)$. Skal vise at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2.$$

For en ortonormal følge $(e_n)_1^\infty$ gjelder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$$

Dette gir:

$$\|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, A^* f_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A^* f_m, e_n\rangle|^2 = \|A^* f_m\|^2 \qquad (*)$$

Dermed har vi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$$

Siden dette gjelder for alle ortonormale følger $(e_n)_1^\infty$ må $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ ha samme verdi for alle komplette ortonormale følger (e_n) i H.

Skal vise at $\{\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2\}^{1/2}$ som kalles *Hilbert-Schmidt normen* til A er lik $\left\{\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}$ hvis A har matrise $[a_{ij}]$ med hensyn til ethvert par av ortonormale sekvenser i H og K.

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{i,j=1}^{\infty} |\langle Ae_j, f_i\rangle|^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}^{1/2}$$

Den siste likheten får vi fordi $a_{ij} = \langle Ae_j, f_i\rangle$

b: **[Young s. 103: 8.6]** Operatornormen til A er mindre eller lik Hilbert-Schmidt-normen for A.

$$\|A\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Ax, f_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle x, A^* f_m\rangle|^2 \le \sum_{m=1}^{\infty} \|x\|^2 \|A^* f_m\|^2$$

Hvis $\|x\| \le 1$ er $\|Ax\| \le \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$. Vet at

$$\sup A = \{\|Ax\| : \|x\| \le 1\}$$

Det gir $\|A\| \le \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$.

Merknad: Jeg vet ikke om det var innføringen eller selve resonnementet som gikk litt vel kjapt i a-punktet, men den aller siste overgangen i $(*)$ kan umulig stemme. Hvis vi derimot stopper rett før det siste likhetstegnet i $(*)$ og summerer over n, får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A^* f_m, e_n\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle A^* f_m, e_n\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2.$$

Litt lenger opp påstås det at $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$ gjelder for enhver ortonormal følge (e_n). Det er viktig å være klar over at det bare er Bessels ulikhet

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

som gjelder for vilkårlige ortonormale følger. Det er bare for *komplette* ortonormale følger at ulikheten alltid blir en likhet.