75033 Lineær analyse 1999

Øving 1

Veiledning:	Fredag 30. januar 14:15–16:00. *
Innlevering:	Tirsdag 2. februar innen 16:00. **
Presentasjon:	Fredag 5. februar i H1 (A: 14:10–15:00, B: 15:10–16:00.)

* Sted for veiledningen kunngjøres så snart det er kjent.

** Det blir satt opp en boks i «matematikk-kroken» i 3. etasje, nordblokka S-2.

1: a) Definerer $d(x,y) = (x-y)^2$ en metrikk på mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall? Vis at $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ definerer en metrikk på $\mathbb{R}$.

b) Vis at $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt$ definerer en norm på $C[a,b]$.

2: a) Hva er en åpen ball $B_1(x_0)$ i $\mathbb{R}$? I $\mathbb{C}$? Eller i $C[a,b]$ (med den vanlige normen på dette rommet: $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\colon a \le x \le b\}$)? Tegn et område i (t,x)–planet som inneholder grafen til alle funksjoner i $B_{1/2}(x_0)$ i $C[-1,1]$, der $x_0(t) = t^2$, og forklar.

b) I rommet $C[0,2\pi]$, bestem minste r slik at $y \in \bar{B}_r(x)$, hvor $x(t) = \sin t$ og $y(t) = \cos t$.

3: a) La X være et reelt vektorrom. En delmengde $C \subseteq X$ kalles *konveks* dersom $x, y \in C$ og $0 \le \lambda \le 1$ impliserer at konvekskombinasjonen $\lambda x + (1-\lambda)y$ tilhører C. Anta nå at $\|\cdot\|$ er en reell funksjon på X slik at følgende er oppfylt:

- $\|x\| > 0$ hvis $x \ne 0$
- $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ for enhver skalar a og $x \in X$
- $\{x \in X \colon \|x\| \le 1\}$ er konveks.

Vis at $\|\cdot\|$ er en norm på X. *Hint*: For å vise trekantulikheten, betrakt $x/\|x\|$, $y/\|y\|$ og en passende konvekskombinasjon av disse.

b) Vis at $\|x\|_p = \big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\big)^{1/p}$ definerer en norm på $\mathbb{R}^n$ når $1 \le p < \infty$. (*Hint*: $\rho(x) = |x|^p$ er en konveks funksjon, det vil si $\rho\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda\rho(x) + (1-\lambda)\rho(y)$ når $0 \le \lambda \le 1$.)

c) Vis at

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\le k\le n} |x_k|.$$

4: a) Beskriv tillukningen til hver av de følgende delmengdene. (i) Heltallene i $\mathbb{R}$, (ii) de rasjonale tallene i $\mathbb{R}$, (iii) de komplekse tallene med rasjonale real- og imaginærdeler i $\mathbb{C}$, (iv) disken $\{z \colon |z| < 1\}$ i $\mathbb{C}$.

b) Vis at tillukningen $\overline{B_r(x_0)}$ av en åpen ball $B_r(x_0)$ i et metrisk rom kan være forskjellig fra $\bar{B}_r(x_0)$.

c) Hvilke av delmengdene i a) er åpne? Lukkede?

5: a) x_0 kalles et *opphopningspunkt* til en mengde $A \subseteq X$ dersom $B_\varepsilon(x_0) \cap A$ inneholder et punkt forskjellig fra x_0 for enhver $\varepsilon > 0$. Vis at dersom dette holder, vil enhver omegn om x_0 inneholde uendelig mange punkter i A.

b) Vis at en delmengde A i et metrisk rom X er lukket hvis og bare hvis A inneholder alle sine opphopningspunkter.

75033 Lineær analyse 1999

Øving 2

Veiledning: Fredag 12. februar 14:15–16:00 i 338 og 344.
Innlevering: Tirsdag 16. februar innen 16:00.
Presentasjon: Fredag 19. februar i H1 (A: 14:10–15:00, B: 15:10–16:00.)

1: a) Oppgave 10 i notatet (*Elements of mathematical analysis*).

b) Vis at dersom en Cauchyfølge har et grensepunkt x, så er følgen konvergent med x som grense.

2: a) Vis at enhver lukket delmengde av et kompakt metrisk rom er kompakt.

b) Vis at enhver kompakt delmengde av et vilkårlig metrisk rom er lukket og begrenset (det siste betyr at det finnes $M < \infty$ slik at $d(x, y) \le M$ for alle punkter x og y i mengden).

3: a) La $X = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ og definer $f\colon X \to X$ ved $f(x) = \frac{1}{2}x + x^{-1}$. Vis at f er en kontraksjon, og finn kontraksjonsfaktoren (det vil si den minste mulige verdi for konstanten i definisjonen av en kontraksjon).

b) La f være en funksjon fra et komplett metrisk rom inn i seg selv, og anta at det finnes et naturlig tall N slik at f^N er en kontraksjon. Vis at f har et entydig fikspunkt. (Her er f^N sammensetningen av f med seg selv N ganger, rekursivt definert ved at $f^0(x) = x$ og $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ for alle $x \in X$.)

4: a) Gi et eksempel på et ikke-komplett metrisk rom X og en kontraksjon på X uten noen fikspunkter.

b) Betingelsen $d(f(x), f(y)) \le K d(x, y)$ der $K < 1$ i Banachs fikspunktsats kan ikke erstattes med $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Vis dette ved å betrakte eksemplet $X = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ med funksjonen $f\colon X \to X$ gitt ved $f(x) = x + x^{-1}$.

5: a) La $1 \le p < \infty$. I oppgave 3 i forrige oppgavesett viste vi at $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$ definerer en norm på $\mathbb{R}^n$. Bruk dette til å vise at mengden l^p av alle tallfølger $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ som oppfyller

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$$

er et vektorrom, og at

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p}$$

definerer en norm på l^p.

b) Vis at l^p er komplett. (*Hint*: La $(x_n)_{n=1}^\infty$ være en Cauchy-følge i l^p. Skriv $x_n = (x_{nj})_{j=1}^\infty$ og vis først at $y_j = \lim_{n\to\infty} x_{nj}$ eksisterer. Vis deretter at $y \in l^p$ ved først å finne et estimat på $\sum_{j=1}^m |y_j|^p$ som ikke avhenger av m og så la $m \to \infty$. Bruk til slutt en lignende teknikk for å vise at $\|x_n - y\|_p \to 0$.)

75033 Lineær analyse 1999

Øving 3

Veiledning: Fredag 26. februar 14:15–16:00 i 338 og 344.
Innlevering: Tirsdag 2. mars innen 16:00.
Presentasjon: Fredag 5. mars i H1 (A: 14:10–15:00, B: 15:10–16:00.)

1: a) La E være et normert rom. En lineæravbildning $A\colon E \to E$ kalles *begrenset* dersom det finnes en konstant M slik at $\|Ax\| \le M$ for hver $x \in E$ med $\|x\| = 1$. Mengden av alle begrensede lineæravbildninger $E \to E$ skrives $\mathscr{L}(E)$. Vis at $\mathscr{L}(E)$ er et normert rom, der vi definerer normen til en operator A ved

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|\colon x \in E, \|x\| = 1\}.$$

Vis at ulikheten $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ gjelder for alle $A \in \mathscr{L}(E)$ og $x \in E$.

b) La nå $E = \mathbb{C}^n$ med normen $\|z\|_\infty = \max_j |z_j|$. Definer normen til en kompleks $n \times n$–matrise A som normen til lineæravbildningen $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gitt ved multiplikasjon med A (altså $z \mapsto Az$). Vis at

$$\|A\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|.$$

2: a) Anvend Picard-iterasjon på ligningen $\dot{x} = 1 + x^2$ der $x(0) = 0$. Vis at x_3 har samme Taylorpolynom av 5. grad som den eksakte løsningen.

b) Vis at initialverdiproblemet $\dot{x} = |x|^{1/2}$, $x(0) = 0$ har løsningene $x_1(t) = 0$ og $x_2(t) = \frac{1}{4}t|t|$. Er dette i strid med Picard-Lindelöf? Finn enda flere løsninger.

3: La E være et indreproduktrom. Vektorer $x, y \in E$ kalles *ortogonale* om $\langle x, y\rangle = 0$, og *ortonormale* om i tillegg $\|x\| = \|y\| = 1$.

a) Vis at $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ hvis x og y er ortogonale (Pythagoras).

b) La $x \in E$ og sett

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$$

der $e_1, \dots, e_n$ er parvis ortonormale vektorer i E. Vis at $x - y_0$ er ortogonal til alle vektorer i rommet $\operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$ utspent av $e_1, \dots, e_n$, og vis at $\|x - y_0\| < \|x - y\|$ for alle $y \ne y_0$ i dette rommet.

c) La nå $E = \mathbb{C}^4$ og finn vektoren som ligger nærmest $[1, 2, 3, 4]^{\mathrm{T}}$ i rommet utspent av $[1, 1, 1, 1]$ og $[1, i, -1, -i]$.

4: a) La $F\colon C[0,T] \to C[0,T]$ være gitt ved $(Fx)(t) = \int_0^t e^{\tau - t} x(\tau)\, d\tau$, for $t \in [0, T]$. La videre indreproduktet på $C[0,T]$ være gitt ved $\langle x, y\rangle = \int_0^T x(t)\overline{y(t)}\, dt$. La $B = \{x \in C[0,T]\colon \|x\| \le 1\}$ og finn en $x_0 \in B$ slik at $|(Fx)(T)| \le (Fx_0)(T)$ for alle $x \in B$.

b) Young s. 11: Problem 1.5.

5: a) Young s. 18: Problem 2.1.

b) Young s. 23: Exercise 3.3.

c) Er normen i a) avledet av et indreprodukt?

75033 Lineær analyse 1999

Øving 4

Veiledning: Fredag 12. februar 14:15–16:00 i 338 og 344.
Innlevering: Tirsdag 16. mars innen 16:00.
Presentasjon: Fredag 19. mars i H1 (A: 14:10–15:00, B: 15:10–16:00.)

1: a) Young s. 11: Pr 1.3.
b) Young s. 42: Pr 4.3.

2: a) Young s. 42: Pr 4.6.
b) Young s. 43: Pr 4.7.
c) Young s. 43: Pr 4.9.

3: a) Young s. 16: Ex 2.8.
b) Young s. 11: Pr 1.2.
c) Young s. 19: Pr 2.11.

4: a) La U og V være lukkede underrom av et Hilbertrom H. Anta at $U \cap V = \{0\}$, og at det finnes en reell konstant $\gamma < 1$ slik at

$$|\langle u, v\rangle| \leq \gamma \|u\| \cdot \|v\|$$

for alle $u \in U$ og $v \in V$. Vis at da er $U + V = \{u + v \colon u \in U, v \in V\}$ lukket.

Hint: Vis først ulikheten $\|u + v\|^2 \geq (1 - \gamma)\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$ for $u \in U$, $v \in V$. Ulikheten $2ab \leq a^2 + b^2$ (en omskrivning av $(a - b)^2 \geq 0$) er nyttig. Gitt en konvergent følge $(u_n + v_n)$ i $U + V$, vis at (u_n) er en Cauchy-følge, og derfor konvergent.

b) Anta nå at $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er et ortonormalt system i et Hilbertrom H, la $\alpha_k > 0$ og $\beta_k > 0$ for alle k, med $\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1$. La

$$\begin{aligned} U &= \overline{\mathrm{lin}}\{e_{2k-1} \colon k = 1, 2, 3, \ldots\}, \\ V &= \overline{\mathrm{lin}}\{\alpha_k e_{2k-1} + \beta_k e_{2k} \colon k = 1, 2, 3, \ldots\} \end{aligned}$$

(Jeg skriver $\overline{\mathrm{lin}}$ der Young skriver clin.) Vis at $U \cap V = \{0\}$. *Hint*: Vektorene $\alpha_k e_{2k-1} + \beta_k e_{2k}$ danner et ortonormalt system. Enhver vektor $u \in U$ er ortogonal på vektorene e_{2k}.

c) Vis at et passende valg av α_k og β_k i punkt b) gir et eksempel der $U + V$ ikke er lukket.

Hint: Vis at $\overline{U + V} = \overline{\mathrm{lin}}\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, men for hver $w \in U + V$ gjelder

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle w, e_{2k}\rangle|^2}{\beta_k^2} < \infty$$

5: a) La $u_1, \ldots, u_n$ være lineært uavhengige vektorer i et indreproduktrom H. Vis at $n \times n$–matrisen G med elementer $g_{jk} = \langle u_j, u_k\rangle$ er positivt definit.

b) Under betingelsene i punkt a), la $y \in H$. Vis at vektoren i $\mathrm{lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$ som er nærmest y er $\sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, der skalarene c_j oppfyller ligningssystemet (*normalligningene*)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, u_k\rangle = \langle y, u_k\rangle, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

75033 Lineær analyse 1999

Øving 5

Veiledning:	Fredag 26. mars 14:15–16:00 i 338 og 344.
Innlevering:	Mandag 12. april innen 16:00.
Presentasjon:	Fredag 9. april i H1 (A: 14:10–15:00, B: 15:10–16:00.)

Det er uheldig at innleveringen kommer etter presentasjonen, men kalenderen og påskeferien kan ingen gjøre noe med.

1: Sett deg inn i utledningen nedenfor og forklar spesielt de to «*hvorfor*?»:

Et problem beslektet med normalligningene er det å finne den vektor f i et gitt Hilbertrom med minimal norm, som tilfredsstiller betingelsene $\langle f, g_i \rangle = c_i$ for $i = 1, \dots, n$, der $c_1, \dots, c_n$ er gitte konstanter og $g_1, \dots, g_n$ er lineært uavhengige. Vi kan observere at dersom f_1 og f_2 oppfyller betingelsene, så er $\langle f_1 - f_2, g_i \rangle = 0$ for $i = 1, \dots, n$.
Dersom vi kan bestemme f som en lineærkombinasjon av $g_1, \dots, g_n$ vil vi derfor ha funnet løsningen (*hvorfor*?) og problemet er redusert til å bestemme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ slik at $\langle \sum_j \lambda_j g_j, g_k \rangle = c_k$ for $k = 1, \dots, n$. Dette gir et system av lineære ligninger for å bestemme koeffisientene. Siden koeffisientmatrisen til systemet har determinant forskjellig fra 0 (*hvorfor*?), er systemet entydig løsbart.

2: Trasen, eller sporet, er en lineærfunksjonal på rommet av komplekse $n \times n$–matriser $\mathbb{C}^{n\times n}$ gitt ved $\operatorname{tr} A = \sum_j a_{jj}$. Dette kan også skrives $\operatorname{tr} A = \sum_j \langle Ae_j, e_j \rangle$ der $e_1, \dots, e_n$ er standardbasisen for $\mathbb{C}^n$ (eller en vilkårlig ortonormal basis). Finn normen til denne funksjonalen i hvert av de følgende tilfellene:

a) $\mathbb{C}^{n\times n}$ er utstyrt med normen $\|A\| = \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$. (*Hint*: En spesielt elegant løsning benytter at $\mathbb{C}^{n\times n}$ i så fall er et indreproduktrom, med indreproduktet gitt ved $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^*A)$.)

b) $\mathbb{C}^{n\times n}$ er utstyrt med normen $\|A\| = \max_j \sum_k |a_{jk}|$. (Som du kanskje husker er dette operatornormen når $\mathbb{C}^n$ utstyres med $\|\cdot\|_\infty$.)

c) $\mathbb{C}^{n\times n}$ er utstyrt med operatornormen $\|A\| = \max\{\|Ax\| \colon x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \le 1\}$ der $\mathbb{C}^n$ har standard norm (avledet av det vanlige indreproduktet i $\mathbb{C}^n$).

3: Young s. 84: Pr 7.7.

4: Young s. 84: Pr 7.8.

5: Young s. 85: Pr 7.15.

75033 Lineær analyse 1999

Øving 6

Veiledning:	Fredag 16. april 14:15–16:00 i 338 og 344.
Innlevering:	Tirsdag 20. april innen 16:00.
Presentasjon:	Fredag 23. april i H1 (A: 14:10–15:00, B: 15:10–16:00.)

1: (*Eksamen august 1993.*) La integraloperatoren $K\colon L^2(-\pi,\pi) \longrightarrow L^2(-\pi,\pi)$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

a) Vis at e_n, $n \geq 0$, er egenvektorer for K der $e_{2n} = \cos nt$ $(n \geq 0)$ og $e_{2n-1} = \sin nt$ $(n \geq 1)$. Hva er de tilhørende egenverdiene?

b) For hvilke funksjoner $y \in L^2(-\pi,\pi)$ har ligningen $Kx = y$ løsninger i $L^2(-\pi,\pi)$? Beskriv løsningsmengden for disse y.

2: La operatoren $D\colon l^2 \longrightarrow l^2$ være definert ved

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \dots, \tfrac{1}{n}x_n, \dots).$$

Finn egenverdiene og spektret til D.

3: a) Er oppgaven D i oppgave 2 kompakt? Begrunn svaret.

b) Young s. 102: Pr 8.2.

4: a) Young s. 86: Pr 7.25.

b) Young s. 87: Pr 7.35.

5: a) Young s. 103: Pr 8.5.

b) Young s. 103: Pr 8.6.