Sturm-Liouville teori

Problemet består i å bestemme alle funksjoner f på $[a,b]$ og skalarer λ slik at

$$(pf')' + (q+\lambda)f = 0 \quad \text{i } [a,b], \tag{$*$}$$
$$\alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0, \tag{∂_a}$$
$$\beta f(b) + \beta' f'(b) = 0. \tag{∂_b}$$

Antagelser: p, p', q kontinuerlige, $p > 0$ og q reell på $[a,b]$, $(\alpha,\alpha') \neq (0,0) \neq (\beta,\beta')$.

Omskrevet: Vi søker en løsning $f \in D(L)$ til

$$Lf + \lambda f = 0 \quad \text{der } Lf \stackrel{\text{def}}{=} (pf')' + qf$$

og $D(L)$ består av alle $f \in L^2[a,b]$ som oppfyller $f'' \in L^2[a,b]$ og i tillegg randbetingelsene (∂_a) og (∂_b).

Dersom det finnes en ikketriviell løsning ($f \neq 0$) kalles λ en *egenverdi* for problemet. For en gitt λ er $Lf + \lambda f = 0$ en ordinær annen ordens differensialligning, som har et todimensjonalt løsningsrom. Med to homogene randbetingelser kan vi forvente at det ikke finnes ikketrivielle løsninger annet enn for spesielt utvalgte λ.

I det påfølgende skal vi for enkelhets skyld anta at 0 ikke er en egenverdi, det vil si $Lf = 0$ har bare den trivielle løsningen.

Løsningsoperatoren

L er en ubegrenset operator. Men den viser seg å ha en *invers* operator K som er kompakt og hermitisk på $L^2[a, b]$. Spektralteoremet gir oss da umiddelbart en ortonormal følge av egenvektorer ϕ_n for K, med tilhørende egenverdier μ_n, slik at $\mu_n \longrightarrow 0$ og

$$Kg = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle g, \phi_n \rangle \phi_n$$

for alle $x \in L^2[a, b]$.

K er en invers for L i følgende forstand: Om $g \in L^2[a, b]$ og $f = Kg$, er $f \in D(L)$ og $Lf = g$.

Spesielt er $g \neq 0 \Longrightarrow Kg \neq 0$. Om g er ortogonal på alle vektorene ϕ_n får vi altså $Kg = 0$, så $g = 0$.

Følgen (ϕ_n) er derfor komplett.

Til egenverdien μ_n for K svarer en egenverdi

$$\lambda_n = -1/\mu_n$$

for Sturm-Liouville-problemet. Siden $\mu_n \longrightarrow 0$ vil $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$, slik at L er en ubegrenset operator.

Greens funksjon

Løsningsoperatoren K har formen

$$(Kg)(x) = \int_a^b k(x,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

der k kalles *Greens funksjon* for problemet. Vi skal konstruere denne funksjonen, og vil da se at den er kontinuerlig, og dermed begrenset. Spesielt er

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,\tau)|^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,\tau < \infty$$

som viser at K er en *Hilbert-Schmidt* operator, og dermed kompakt.

Løsningsrommet

Den generelle teorien for ordinære differensialligninger forteller at ligningen

$$(pf')' + qf = 0 \quad \text{i } [a, b] \tag{0}$$

har en og kun en løsning som i tillegg oppfyller initialverdibetingelser $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = z_0$ dersom $x_0 \in [a, b]$ og y_0, z_0 er gitt. Det følger at alle løsninger av (0) danner et *todimensjonalt* vektorrom.

La nå $u \neq 0$ og $v \neq 0$ være to løsninger av (0) som oppfyller hver sin randbetingelse:

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0, \quad \beta v(b) + \beta' v'(b) = 0.$$

Siden vi antok at at 0 ikke er en egenverdi for problemet vil ikke u oppfylle randbetingelsen i b, og v vil ikke oppfylle randbetingelsen i a. u og v er derfor lineært uavhengige, så de danner en *basis* for løsningsrommet til (0).

Wronskijdeterminanten

Wronskij-determinanten $uv' - u'v$ har *ingen nullpunkter* i $[a, b]$, for om $u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0) = 0$ kan vi finne en ikketriviell løsning (ξ, η) til

$$\begin{aligned} \xi u(x_0) + \eta v(x_0) &= 0, \\ \xi u'(x_0) + \eta v'(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Men da er $y = \xi u + \eta v = 0$ i $[a, b]$, for y løser (0) med $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Siden u og v er lineært uavhengige er dette umulig.

Et enkelt regnestykke viser at følgende multiplum av Wronskij-determinanten er konstant:

$$w = p \cdot (uv' - u'v).$$

Skriv nemlig $w = u \cdot (pv') - (pu') \cdot v$ og derivér:

$$\begin{aligned} w' &= u(pv')' + u'pv' - (pu')'v - pu'v' \\ &= u(-qv) - (-qu)v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Konstruksjon av Greens funksjon

Vi kan gjette oss frem til Greens funksjon ved å anvende løsningsoperatoren på Diracs deltafunksjon: Skriv $\delta_\tau(x) = \delta(x-\tau)$ så skal vi finne

$$K\delta_\tau = k_\tau \quad \text{der } k_\tau(x) = k(x,\tau),$$

og dermed skal k_τ løse

$$(pk_\tau')' + qk_\tau = \delta_\tau$$

sammen med randbetingelsene (∂_a) og (∂_b).

Men $\delta_\tau(x) = 0$ når $x \neq \tau$, og derfor må k_τ ha formen

$$k_\tau(x) = \begin{cases} \xi u(x) & a \le x \le \tau \\ \eta v(x) & \tau \le x \le b \end{cases}$$

Dessuten må k_τ være kontinuerlig i $x = \tau$, og pk_τ' må ha en sprangdiskontinuitet av høyde 1 i $x = \tau$ (tenk på Heavisidefunksjonen og dens deriverte). Dette gir ligningene

$$\begin{bmatrix} u(\tau) & -v(\tau) \\ -pu'(\tau) & pv'(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med løsning

Eksplisitt formel for Greens funksjon

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} pv'(\tau) & v(\tau) \\ pu'(\tau) & u(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} v(\tau) \\ u(\tau) \end{bmatrix}$$

Vi har altså funnet at

$$k(x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{u(x)v(\tau)}{w} & a \le x \le \tau \le b \\ \dfrac{v(x)u(\tau)}{w} & a \le \tau \le x \le b \end{cases}$$

Det er verdt å legge merke til at denne funksjonen er kontinuerlig, og dermed begrenset i det kompakte området $[a,b] \times [a,b]$. Den tilhørende integraloperatoren K er derfor en *Hilbert-Schmidt* operator, og altså *kompakt*. Dessuten er k symmetrisk, som viser at K blir *hermitisk*.

Denne utledningen brukte Diracs deltafunksjon, og kan derfor ikke regnes som særlig rigorøs (selv om den antagelig kan forsvares om man tar distribusjonsteorien i bruk).

For å gjøre utledningen rigorøs, er det nok å vise at integraloperatoren K med kjernen k er en invers operator for L. Dette er neste post på programmet.

Greens funksjon virker

Vi tar altså en funksjon $g \in L^2[a,b]$ og betrakter

$$f(x) = \int_a^b k_\tau(x) g(\tau) \,\mathrm{d}\,\tau.$$

hvor k_τ er funksjonen gitt ved $k_\tau(x) = k(x,\tau)$.

Vi trenger å vise at f løser

$$(pf')' + qf = g \qquad (**)$$

sammen med randbetingelsene (∂_a) og (∂_b).

Vi gjør dette bare for $g \in C[a,b]$ – det generelle tilfellet krever litt distribusjonsteori.

Det er ikke vanskelig å se at vi kan finne f' ved en enkel derivasjon med hensyn på x under integralet ovenfor. Vi må bare huske på at $k(x,\tau)$ er forskjellig definert når $x \leq \tau$ og når $x \geq \tau$, men i hvert av de to områdene er k to ganger kontinuerlig deriverbar. Vi skriver

$$f(x) = \int_a^x k_\tau(x) g(\tau) \,\mathrm{d}\,\tau + \int_x^b k_\tau(x) g(\tau) \,\mathrm{d}\,\tau$$

og deriverer:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{\tau\to x-} k_\tau(x)g(\tau) + \int_a^x k'_\tau(x)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\
- \lim_{\tau\to x+} k_\tau(x)g(\tau) + \int_x^b k'_\tau(x)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\
= \int_a^x k'_\tau(x)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \int_x^b k'_\tau(x)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau
\end{aligned}
$$

siden k er kontinuerlig. Vi multipliserer med $p(x)$ og deriverer en gang til. For enkelhets skyld setter vi $r_\tau(x) = p(x)k'_\tau(x)$ og finner

$$
\begin{aligned}
(pf')'(x) = \lim_{\tau\to x-} r_\tau(x)g(\tau) + \int_a^x r'_\tau(x)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \\
- \lim_{\tau\to x+} r_\tau(x)g(\tau) + \int_x^b r'_\tau(x)g(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau
\end{aligned}
$$

Her er de to integralene greie å håndtere, for $r'_\tau(x) = (pk'_\tau)'(x) = -q(x)k_\tau(x)$ slik at *summen av de to integralene blir* $-q(x)f(x)$.

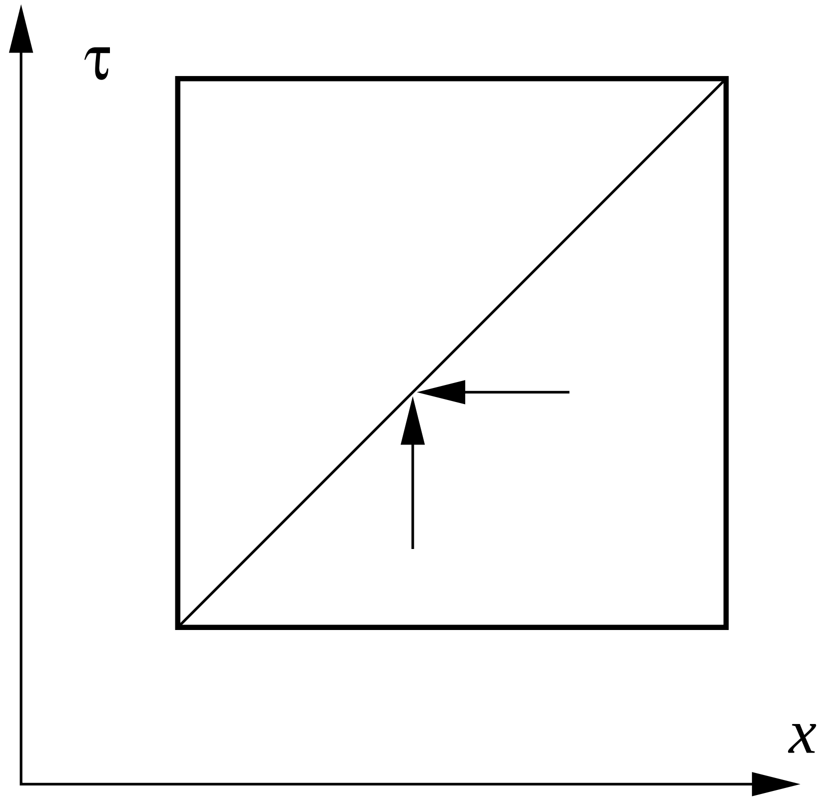
Videre er

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to x-} r_\tau(x)g(\tau) &= p(x)g(x) \lim_{\tau\to x-} k'_\tau(x) \\
&= p(x)g(x) \lim_{\xi\to x+} k'_x(\xi)
\end{aligned}
$$

og tilsvarende er

$$
\lim_{\tau\to x+} r_\tau(x)g(\tau) = p(x)g(x) \lim_{\xi\to x-} k'_x(\xi)
$$

Figuren viser to grenser mot diagonalen med samme verdi: Ovenfra i x-retning, eller nedenfra i τ-retning.



Tilsammen har vi derfor

$$\begin{aligned}(pf')'(x) + q(x)f(x) &= p(x)\big(k'_x(x+) - k'_x(x-)\big)g(x) \\ &= g(x)\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

Alternativ utledning

Vi kan utlede Greens funksjon ved å løse $Lf = g$ ved *variasjon av parametre*: Vi forsøker

$$f = \phi u + \psi v, \qquad f' = \underbrace{\phi' u + \psi' v}_{=0} + \phi u' + \psi v'$$

(metoden krever at vi setter summen av de to første leddene i f' lik 0) og om vi nå skriver $py' = \phi \cdot pu' + \psi \cdot pv'$ får vi

$$(pf')' + qf = \phi \cdot \underbrace{((pu')' + qu)}_{=0} + \psi \cdot \underbrace{((pv')' + qv)}_{=0} + \phi' pu' + \psi' pv'$$

så vi ledes til ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} u & v \\ pu' & pv' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

med løsning

$$\begin{bmatrix} \phi' \\ \psi' \end{bmatrix} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} pv' & -v \\ -pu' & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} -vg \\ ug \end{bmatrix}$$

Randbetingelsen $\alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0$ gir

$$\phi(a) \cdot \underbrace{(\alpha u(a) + \alpha' u'(a))}_{=0} + \psi(a) \cdot \underbrace{(\alpha v(a) + \alpha' v'(a))}_{\neq 0}$$

hvorav $\psi(a) = 0$. Tilsvarende blir $\phi(b) = 0$, og vi kan nå skrive

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_b^x \frac{-v(\tau)g(\tau)}{w}\,\mathrm{d}\tau = \int_x^b \frac{v(\tau)g(\tau)}{w}\,\mathrm{d}\tau,\\ \psi(x) &= \int_a^x \frac{u(\tau)g(\tau)}{w}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

som gir løsningen

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^b \frac{v(\tau)u(x)}{w} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_a^x \frac{u(\tau)v(x)}{w} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_a^b k(x,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Eksempel

Som et enkelt eksempel betrakter vi problemet

$$f'' + \lambda f = 0 \quad \text{i } [0,\pi], \qquad f(0) = f(\pi) = 0.$$

Dette svarer til $p = 1$, $q = 1$, $a = 0$ og $b = \pi$.

Egenverdiene og egenfunksjonene for dette problemet er vel kjent:

$$\phi_n = \sin nx, \quad \lambda_n = n^2 \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

og det vil følge av den generelle teorien at $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$ er et komplett ortonormalt system på $L^2[0,\pi]$.

Med $\lambda = 0$ blir ligningen $f'' = 0$, med generell løsning $f(x) = Ax + B$. Setter vi inn begge randbetingelsene får vi $A = B = 0$ som eneste løsning, så 0 er ikke en egenverdi. Krever vi bare en randbetingelse om gangen får vi to løsninger

$$u(x) = x, \quad v(x) = \pi - x$$

hvorav $w = p \cdot (uv' - u'v) = -\pi$, som gir

$$k(x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{x(\tau - \pi)}{\pi} & a \le x \le \tau \le b \\[2ex] \dfrac{(x-\pi)\tau}{\pi} & a \le \tau \le x \le b \end{cases}$$

Generaliseringer

Vi antok at 0 ikke er en egenverdi for det opprinnelige Sturm-Liouville problemet. Dette er ikke noen alvorlig begrensning, for om så ikke er tilfelle kan vi alltid finne en konstant μ som ikke er en egenverdi, og så erstatte funksjonen q med $q + \mu$. Vi må bare huske å trekke μ fra egenverdiene til slutt.

Singulære problemer: I mange anvendelser har p et nullpunkt i enden av intervallet. I så fall byttes randbetingelsen i den enden ut med betingelsen at f skal være begrenset i en omegn om dette punktet, og teorien fungerer omtrent som før. En beslektet variant er $a = -\infty$, $b = \infty$ eller begge deler. Disse håndteres med en tilsvarende omskriving av randbetingelsen. Eksempler fra kvantemekanikken er den harmoniske oscillatoren og problemer forbundet med hydrogenatomet.

Periodiske randbetingelser: Dette er randbetingelser på formen $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$. De er åpenbart relevante for periodiske fenomener, for eksempel der den uavhengige variabelen er en vinkel (med $a = 0$ og $b = 2\pi$, for eksempel).

Vektfunksjoner

En annen, ofte forekommende generalisering er å legge til en vektfunksjon ρ, som antas å være positiv i $[a, b]$ hvor $(*)$ erstattes med

$$(pf')' + (q + \lambda\rho)f = 0$$

som vi formelt skriver $Lf + \lambda M^2 f = 0$, der M er multiplikasjonsoperatoren som multipliserer med $\rho^{1/2}$.

Vi lar K være den inverse til for operatoren L med de gitte randbetingelsene, og skriver problemet heller på formen $f + \lambda KM^2 f = 0$. Vi setter $\psi = Mf$, anvender M på ligningen, og får $\psi + \lambda MKM\psi = 0$.

Operatoren MKM er kompakt, fordi K er kompakt og M er begrenset. Den er også hermitisk, fordi K og M er det. Så den har en komplett ortonormal følge (ψ_n) av egenvektorer i $L^2[a, b]$. De tilhørende egenvektorene $\phi_n = M^{-1}\psi_n$ blir ikke ortonormale i $L^2[a, b]$, men vi finner

$$\int_a^b \psi_m(x)\overline{\psi_m(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \phi_m(x)\overline{\phi_m(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}\,x$$

slik at egenvektorene ϕ_n danner en ortonormal følge i Hilbertrommet $L^2_\rho[a, b]$ av funksjoner f som oppfyller

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}\,x < \infty$$

og der indreproduktet er gitt ved

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}\,x < \infty.$$