UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Faye Knudsen (59)3523/20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 6. juni 1992
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1

La l^∞ betegne rommet av begrensede (engelsk: "bounded") tallfølger $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$ med supremumsnorm

$$(*) \qquad \|x\| = \sup_{k \in \boldsymbol{N}} |\xi_k|$$

a) Vis at (*) definerer en norm. Hva er den avledete (induserte) metrikken?

b) Forklar hva som menes med et komplett metrisk rom, og vis at l^∞ er komplett.

c) Er normen i l^∞ avledet av et indreprodukt? (Begrunn svaret.)

Oppgave 2

a) Gi definisjonen av en kontraksjon på et metrisk rom. Referer Banach's fikspunktteorem for en kontraksjon på et komplett metrisk rom.

b) Vis at Volterra operatoren $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ gitt ved

$$Vx(t) = \int_0^t x(s)ds \quad ; \quad 0 \le t \le 1$$

har norm mindre enn 1.

c) Finn en kontinuerlig funksjon x på intervallet $[0,1]$ som tilfredsstiller integralligningen

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds \quad ; \quad 0 \le t \le 1.$$

Er løsningen entydig?

Oppgave 3

Finn $a, b \in \boldsymbol{C}$ slik at $\int_0^1 |x^3 - a - bx|^2 dx$ minimaliseres.

Oppgave 4

La operatoren $D : l^2 \to l^2$ være definert ved

$$D(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_k}{k}, \cdots)$$

Finn egenverdiene og spektret til D.

(l^2 er Hilbertrommet av alle tallfølger $x = (\xi_k)$ slik at $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$ med indreproduktet $< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k$).

Oppgave 5

La H^* betegne rommet av kontinuerlige lineærfunksjonaler på Hilbertrommet H og vis følgende:

Dersom x er et element i H og (x_n) er en følge fra H slik at $\|x_n\| \to \|x\|$ og $F(x_n) \to F(x)$ for alle $F \in H^*$, så vil $x_n \to x$.
(Vink : Se på $\|x - x_n\|^2$)