UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Kari Hag (59)3521

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 11. august 1992
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1 For en reellvaluert, kontinuerlig funksjon f på enhetsintervallet $[0,1]$ defineres

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

a) Vis at dette gir en norm for vektorrommet av slike funksjoner.

b) Forklar hva som menes med et komplett normert rom, og vis at rommet ikke er komplett.

c) Vis også at normen ikke kan avledes fra noe indreprodukt.

Oppgave 2

a) La E være et komplett normert rom. Referer Banachs fikspunkt sats for en kontraksjon på E.

b) Den lineære operatoren $T : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ er definert ved:

$$Tx = Ax^T \quad \text{der} \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

og A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\|T\| < 1$ når $\boldsymbol{R}^4$ er forsynt med maksimumsnormen, dvs. $\|x\| = \max_j |x_j|$.

c) Begrunn at likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & = & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 12 \\ 5x_2 & = & 2x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & 10 \\ 6x_3 & = & 3x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & - & 18 \\ 4x_4 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & 8 \end{array}$$

kan løses ved iterasjon med utgangspunkt i $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Oppgave 3 I denne oppgaven er X et indreproduktrom.

a) Vis ut fra aksiomene for et indreproduktrom at når a og b er ortogonale vektorer i X vil

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

b) La $x \in X$ og sett $y_0 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$ der $e_1, ..., e_n$ er ortonormale vektorer i X. Vis at $x - y_0$ er ortogonal til alle vektorer y i rommet utspent av $e_1, ..., e_n$, og etabler ulikheten

$$\|x - y_0\| < \|x - y\|, \quad y \neq y_0.$$

c) La nå $X = \boldsymbol{C}^4$ og finn vektoren som ligger nærmest $(1, 2, 3, 4)$ i rommet utspent av $(1, 0, 1, 0)$ og $(1, 1, 1, 1)$.

Oppgave 4 Hva sier spektralteoremet for en kompakt Hermitisk operator K på et Hilbertrom H?

Vis at dersom K i tillegg er positiv semidefinitt, dvs. $< Kx, x > \geq 0$ for alle $x \in H$, så er egenverdiene ≥ 0 og det fins en Hermitisk operator A slik at $A^2 = K$.