UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Faye Knudsen (59)3523/20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Onsdag 2. juni 1993
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1

a) Vis at $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ definerer en metrikk på $\boldsymbol{R}$.

b) Forklar hva som menes med normert rom og avledet metrikk. Er metrikken i a) avledet av en norm?

c) Forklar hva som menes med et indreprodukt rom og avledet norm. Gi et eksempel på et normert rom der normen ikke er avledet av et indreprodukt.

Oppgave 2 La E være et Banach rom, dvs. et komplett normert rom, og $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ en følge fra E slik at rekken $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergerer. Vis at partialsummene $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ er en Cauchyfølge og konkluder at det fins et element $x \in E$ slik at $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Oppgave 3

La $C[-1,1]$ være rommet av kontinuerlige reelle funksjoner på intervallet $[-1,1]$ forsynt med <u>maksimumsnorm</u>.

a) La $F : C[-1,1] \to \boldsymbol{R}$ være gitt ved

$$F(x) = \int_{-1}^{1} k(t)x(t)dt \quad \text{der} \quad k(t) = \begin{cases} -1 & \text{der} \quad -1 \le t \le 0 \\ 1 & \text{for} \quad 0 < 1 \le 1 \end{cases}$$

Vis at F er en begrenset lineærfunksjonal og bestem $\|F\|$.

b) La $A \subseteq C[-1,1]$ være mengden av funksjoner $x(t)$ som tilfredsstiller

$$(*) \qquad F(x) = \int_{-1}^{1} k(t)x(t)dt = 2.$$

Vis at A er ikke-tom, lukket og konveks, men at det ikke fins noe element i A med minst mulig norm. Kunne denne vanskeligheten ha oppstått i et Hilbertrom? (Svaret skal begrunnes.)

Oppgave 4 La H være et separabelt Hilbertrom og $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en komplett ortonormal følge.

a) Forklar hva som menes med at $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en komplett følge. Skriv også ned formelen for hvordan $x \in H$ og $\|x\|^2$ kan uttrykkes v.h.a. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, og indreproduktet i H.

b) La $A \in \mathcal{L}(H)$, dvs. A er en begrenset lineær operator på H, og la $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ være matrisen til A m.h.p. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, dvs.

$$A_{ij} =< Ae_j, e_i > \qquad \text{for alle } i \text{ og } j.$$

Vis at hver søyle og hver linje i matrisen er kvadratisk summerbar, dvs.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty \text{ for alle } j \text{ og } \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty \text{ for alle } i.$$

c) Gi et eksempel på en diagonalmatrise $[d_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ som ikke er matrisen til en begrenset lineær operator på H (selv om hver søyle og hver linje trivielt er kvadratisk summerbar her). Dersom en generell <u>matrise</u> $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ er kvadratisk summerbar, dvs. $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 < \infty$, vil den tilhørende operatoren på H være begrenset? Kompakt? Svarene skal begrunnes.

Oppgave 5 Vis at vektorrommet $W[0,1]$ av av kontinuerlig deriverbare funksjoner $[0,1]$ med verdier i $\boldsymbol{C}$ og med

$$< f, g >_W = \int_0^1 [f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}]dt$$

er et indreproduktrom, dvs. at formelen over definerer et indreprodukt.
Blir differensialoperatoren

$$\frac{d}{dt} : W[0,1] \to L^2[0,1]$$

begrenset? (svaret skal begrunnes).