UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Anne Kværnø (0759)3542

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 14. august 1993
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1

La x, y være elementer i $\boldsymbol{R}^2$. Sett $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, og la
$d_p(x,y) = [|\xi_1 - \eta_1|^p + |\xi_2 - \eta_2|^p]^{1/p}$; $1 \leq p < \infty$,
$d_\infty(x,y) = \max(|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|)$.

a) Såvel d_p, $1 \leq p < \infty$, som d_∞ er metrikker for $\boldsymbol{R}^2$. Vis dette for d_∞.

b) Skisser enhetssfæren $S(0;1)$ i metrikkene d_1, d_2, d_∞. Vis at $\lim_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$.

Oppgave 2

Anta at X er et metrisk rom der hver Cauchyfølge har en konvergent delfølge. Vis at X er komplett.

Oppgave 3

Gitt det lineære likningssystemet

$$(*) \qquad (I - A)x = b$$

der b er en N-vektor, I er $N \times N$-identitetsmatrisen og $A = [a_{ij}]$ er en reell $N \times N$-matrise slik at $\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| < 1$.

a) Vis at $||A|| = \alpha$ når A er matrisemultiplikasjon på $\boldsymbol{R}^N$ forsynt med maksimumsmetrikk ($||x||_\infty = \max_i |\xi_i|$).

b) Begrunn at $(*)$ har en entydig bestemt løsning s og at denne kan finnes ved iterasjon fra et vilkårlig startpunkt x_0 i $\boldsymbol{R}^N$, dvs. $||x_n - s||_\infty \to 0$ der $x_n = b + Ax_{n-1}$.

c) Vis at for alle $n \geq 1$ gjelder

$$||x_n - s||_\infty \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} ||x_n - x_{n-1}||.$$

Oppgave 4

La A være en Hermitisk operator på et Hilbert rom. Vis at da er alle egenverdiene til A reelle, og egenvektorer svarende til forskjellige egenverdier er ortogonale.

Oppgave 5

La integraloperatoren $K : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t + s)x(s)\, ds.$$

a) Vis at 1, $\cos nt$, $\sin nt$, $n \in \boldsymbol{N}$, er egenvektorer til K. Hva blir de tilhørende egenverdiene?

b) For hvilke funksjoner $f \in L^2[-\pi, \pi]$ har likningen

$$Kx = f$$

løsninger? Beskriv løsningsmengden for disse f.