UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Kari Hag (7359)3521

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 9. juni 1994
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Lommekalkulator ikke tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 La x, y være elementer i $X = \boldsymbol{R}^N$. Sett $x = (x_1, ..., x_N)$, $y = (y_1, ..., y_N)$, og la $d_1(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{N} |x_k - y_k|$.

a) Vis at (X, d_1) er et komplett metrisk rom. (Du kan anta som kjent at $(\boldsymbol{R}, |\ \ |)$ er det).

b) Hva forstår vi med en indusert metrikk? La Y være mengden av alle ordnede N-tupler av nuller og enere og la $d(x, y)$ = antall plasser der x og y har forskjellige komponenter. Begrunn at (Y, d) er et komplett metrisk rom.

Oppgave 2

a) La $A = [a_{ij}]$ være en $N \times N$-matrise der $\alpha = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{N} |a_{ij}| < 1$. Vis at $\| A \| = \alpha$ når A er matrisemultiplikasjonsoperatoren på $\boldsymbol{R}^N$ forsynt med normen $\| x \| = \sum\limits_{k=1}^{N} |x_k|$.

b) Begrunn ved Banachs fikspunktteorem at det lineære likningssystemet

$$(I - A)x = b$$

der I er $N \times N$-identitetsmatrisen, A er matrisen fra a) og b er en N-vektor har en entydig bestemt løsning.

c) Avbildingen $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ gitt ved $f(x) = x + \frac{1}{x}$ har ikke noe fikspunkt. Påvis at f ikke er noen kontraksjon. Illustrer også med et eksempel at kompletthet ikke kan sløyfes i Banachs fikspunktteorem.

Oppgave 3 La integraloperatoren $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds \quad \text{der}$$

$$k(t,s) = \begin{cases} (1-t)s; & 0 \leq s \leq t \\ (1-s)t; & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

a) Hva sier spektralteorien om egenvektorer og egenverdier for K?
Vis at $\sin n\pi t, n \in \boldsymbol{N}$, er egenvektorer til K og bestem de tilhørende egenverdiene. Har K andre egenvektorer? Begrunn. (Husk at $(\sqrt{2}sinn\pi t)_{n\in\mathbf{N}}$ er en komplett ortonormal følge i $L^2[0,1]$).

b) Diskuter v.hj.a. Fourierteori løsningene til $Kx - \lambda x = f$ der $f \in L^2[0,1]$ for de forskjellige verdier av $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Oppgave 4 La H være et komplekst Hilbertrom og $A : H \to H$ en lineær isometrisk operator, dvs. $\| Ax \| = \| x \|$ for alle $x \in H$. (Høyre skiftoperator er et eksempel på en slik operator.)

a) Vis at A også bevarer indreproduktet, dvs. $< Ax, Ay > = < x, y >$ for alle $x, y \in H$. (Husk polaridentiteten

$$< x, y >= 4^{-1}[(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2) + i(\| x + iy \|^2 - \| x - iy \|^2)] \;)$$

b) Vis at for alle $x \in H$ er $A^*Ax = x$ mens AA^*x er projeksjonen av x på underrommet $M = \{z | z = AA^*y, y \in H\}$.