UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Trond Digernes (7359)3517

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 27. august 1994
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Lommekalkulator ikke tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

a) La X være et komplekst indreproduktrom. Vis at da gjelder følgende formler

$(^*)$ $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$

$(^{**})$ $< x, y >= 4^{-1}[(||x+y||^2 - ||x-y||^2) + i(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2)]$

(En kan også vise at et normert rom der $(^*)$ er oppfylt er et indreproduktrom, men det skal <u>ikke</u> gjøres i denne oppgaven.)

Oppgave 2 La $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ være en ortonormal følge i et Hilbertrom H, og la $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge av komplekse tall slik at $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Vis at det fins et element $x \in H$ slik at $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Oppgave 3 La $e_0(t) = 1, e_1(t) = \sqrt{3}(2t-1)$ der $0 \le t \le 1$. Vis at e_0, e_1 er et ortonormalt system i $L^2[0,1]$ og bestem det lineære polynomet $f(t) = at + b; a, b \in \mathbf{C}$, som minimaliserer $\int_0^1 |t^2 - f(t)|^2 dt$.

Oppgave 4

a) Vis at integraloperatoren $K : C[0,1] \to C[0,1]$ gitt ved

$$Kx(t) = \int_0^t s\, ln(s/t)\, x(s) ds; \qquad 0 < t \leq 1$$

har norm mindre enn 1. ($C[0,1]$ er utstyrt med maksimumsnorm).

b) Finn en potensrekkeløsning (i t) av integralligningen

$$x(t) = 1 + Kx(t); \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Oppgave 5 La $V : l^2 \to l^2$ være venstre skiftoperator gitt ved $V(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

a) Vis at alle $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $|\lambda| < 1$, er egenverdier til V.

b) Finn spektret til V.

Oppgave 6

a) Gitt et Hilbertom H. La M være et lukket underrom av H, og la operatoren $P : H \to H$ være definert slik: For $x \in H$ er Px det entydig bestemte elementet i M med egenskapen $x - Px \in M^{\perp}$.
Vis at $P \in \mathcal{L}(H)$, $P^2 = P$ og $P^* = P$. (P kalles den <u>ortogonale</u> <u>projeksjonen</u> på M.)

b) Omvendt, gitt $T \in \mathcal{L}(H)$ slik at $T^2 = T$ og $T^* = T$. Vis at T da er den ortogonale projeksjonen på $M = \{Tx : x \in H\}$.