UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Trond Digernes (73 5) 93517

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 30. mai 1995
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: - Lommekalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 Bestem skalarene $a, b \in \mathbf{C}$ slik at integralet $\int_{-1}^{1} |1 - ax - bx^2|^2 \, dx$ minimaliseres.

Oppgave 2

a) For enhver følge $c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ kan vi definere en avbildning $F_c : \ell^1 \to \mathbf{C}$ ved

$$F_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \,, \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \,. \tag{1}$$

Vis at F_c blir en begrenset lineær funksjonal på ℓ^1 og at

$$\|F_c\| = \|c\|_{\infty} \,.$$

(Vi minner om at ℓ^1 er Banach-rommet av alle absolutt konvergente komplekse følger $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ med norm $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, og at ℓ^{∞} er Banach-rommet av alle begrensede komplekse følger $c = (c_n)_{n=1}^{\infty}$ med norm $\|c\|_{\infty} = \sup_n |c_n|$; videre: $\|F_c\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |F_c(x)|$.)

b) La g være en begrenset lineær funksjonal på ℓ^1. Vis at det finnes en følge $c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ slik at $g = F_c$ med F_c som i (1).
[Hint: Betrakt følgen $c = (c_n)_{n=1}^{\infty}$ gitt ved $c_n = g(e_n)$ hvor $e_n \in \ell^1$ er følgen med 1 i n-te posisjon og nuller ellers.]

Oppgave 3

a) La A være en lineær operator med $\|A\| < 1$ på et Hilbert-rom H. Bruk Banach's fikspunkt-teorem til å vise at ligningen

$$x = f + Ax$$

har en éntydig løsning x for enhver gitt $f \in H$. Utled formelen $x = \sum_{n=0}^{\infty} A^n f$ ved hjelp av fikspunkt-teoremets iterasjonsformel ($A^0 = I =$ identitetsoperatoren).

b) Definér hva det vil si at en begrenset lineær operator er invertibel. Bruk resultatet fra **a**) til å vise at operatoren $I - A$ er invertibel og at $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ når $\|A\| < 1$.

Oppgave 4

a) La g og h være to vektorer i et Hilbert-rom H, og definér en lineær operator $K : H \to H$ ved

$$Kx = (x,h)g + (x,g)h\,, \qquad x \in H\,,$$

hvor som vanlig (,) betegner indreproduktet. Beskriv nullrommet $\{x \in H; Kx = 0\}$ og rekkevidden $\{Kx; x \in H\}$ til K, og begrunn at K er en kompakt operator. Vis også at K er Hermitisk, dvs. $(Kx, y) = (x, Ky)$ for alle $x, y \in H$.

NB! I resten av denne oppgaven antas at vektorene g og h står ortogonalt på hverandre, dvs. $(g,h) = 0$.

b) Vis at

$$|(x,h)|^2\,\|g\|^2 + |(x,g)|^2\,\|h\|^2 \leq \|x\|^2\,\|g\|^2\,\|h\|^2$$

for alle $x \in H$. Vis dernest at $\|K\| = \|g\|\|h\|$ (K som i **a**)).

c) Betrakt ligningen

$$x = g + Kx\,,$$

dvs.

$$x = g + (x,h)g + (x,g)h\,. \tag{2}$$

Vis at ligningen (2) har en løsning x hvis og bare hvis $\|g\|\|h\| \neq 1$, og at løsningen er éntydig når den eksisterer. Finn x uttrykt ved g og h når $\|g\|\|h\| \neq 1$.
(Husk at $(g,h) = 0\,$!)

d) La M være operatoren på $H = L^2[-1,1]$ gitt ved

$$(Mx)(t) = \int_{-1}^{1} (t+s)x(s)\,ds\,, \qquad x \in L^2[-1,1]\,, \quad t \in [-1,1]\,.$$

Bestem to funksjoner g og h med $(g,h) = 0$ slik at

$$Mx = (x,h)g + (x,g)h\,.$$

Begrunn ut fra det som er sagt ovenfor at integralligningen

$$x(t) = t + \int_{-1}^{1} (t+s)x(s)ds\,, \qquad x \in L^2[-1,1]\,, \quad t \in [-1,1]\,,$$

har en éntydig løsning x, og bestem denne.