UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Olav Njåstad (73 5) 93513/20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 10. august 1995
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: - Lommekalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 Gitt vektorene $a = (3, 0, 0)$, $u = (1, i, 0)$ og $v = (i, 0, 1)$ i $\mathbf{C}^3$, utstyrt med sitt vanlige indreprodukt. Finn den vektoren x i underrommet utspent av u og v som ligger nærmest a.

Oppgave 2

a) La S og T betegne henholdsvis høyre og venstre skift-operator på Hilbert-rommet ℓ^2, dvs.,

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \qquad T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

hvor $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$.
Vis at $S^* = T$. Hva er sammenhengen mellom rekkevidden $\mathcal{R}(S)$ til S og nullrommet (kjernen) $\mathcal{N}(T)$ til T?
Beskriv operatorene ST og TS. Er operatorene S og T invertible?
Begrunn svarene.

b) Vis at for enhver begrenset lineær operator A på et Hilbert-rom gjelder at $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$, det ortogonale komplement til $\mathcal{R}(A^*)$ (betegnelser forøvrig som i pkt. **a**).

c) La H være et Hilbert-rom. Avgjør om følgende tre utsagn er riktige for begrensede operatorer A og B på H (alle tre utsagnene er riktige dersom $\dim(H) < \infty$). Hvis utsagnet er riktig, gi et bevis – i motsatt fall, gi et moteksempel:

$$AB \text{ invertibel} \implies A \text{ invertibel og } B \text{ invertibel} \tag{1}$$
$$AB \text{ invertibel} \implies BA \text{ invertibel} \tag{2}$$
$$AB \text{ invertibel og } BA \text{ invertibel} \implies A \text{ invertibel og } B \text{ invertibel} \tag{3}$$

Oppgave 3 Definér hva det vil si at en lineær operator på et normert rom er kompakt.
-La A og B være lineære operatorer på et normert rom. *Vis:* Dersom A er begrenset og B er kompakt, så er operatorene AB og BA begge kompakte.

Oppgave 4

a) Referér Banach's fikspunkt-teorem for en kontraksjon på et komplett metrisk rom. Bruk dette teoremet til å vise følgende påstand: *Anta T er en avbildning av et komplett metrisk rom inn i seg selv, og anta det finnes et naturlig tall N slik at T^N er en kontraksjon. Da har T et éntydig fikspunkt.*

b) Volterra-operatoren V er definert på $C[0,1]$ ved

$$(Vx)(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \qquad t \in [0,1], \quad x \in C[0,1]\,.$$

Vis at $\|V\| = 1$ når $C[0,1]$ utstyres med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$.

c) Vis ved induksjon at

$$(V^n x)(t) = \int_0^t x(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds\,.$$

Bruk så dette til å vise at $\|V^n\| = \frac{1}{n!}$.

d) Bruk resultatene ovenfor til å gjøre rede for at hver av integralligningene

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds \tag{4}$$

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)(t-s)\,ds \tag{5}$$

har entydig løsning i $C[0,1]$.
Løs den siste integralligningen (lign. 5).