Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

Hjelpemidler: - Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 30. mai 1996
Tid: 09.00-13.00

Oppgave 1 Vis at $\langle x, y\rangle = \int_0^\infty e^{-t} x(t)\overline{y(t)}dt$ definerer et indreprodukt på vektorrommet av polynom (med komplekse koeffisienter).

Bestem $a, b \in \mathbf{C}$ slik at $\int_0^\infty e^{-t}|t^2 - a - bt|^2 dt$ blir minimal. (Det oppgis at $\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!$)

Oppgave 2

a) La (X, d) være et metrisk rom. Vis at dersom følgen $(x_n)_{n=1}^\infty$ fra X er konvergent, så er den en Cauchy-følge.

b) La $(E, \| \|)$ være et Banach-rom. Vis at dersom $(x_n)_{n=1}^\infty$ er en følge fra E slik at $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ er konvergent, så konvergerer rekka $\sum_{n=1}^\infty x_n$ i E.

Oppgave 3 La $C[0,1]$ være utstyrt med maksimumsnormen $\| \|_\infty$ og la operatoren $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^t e^{t-s} x(s)ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) Vis at K er begrenset og finn $\|K\|$.

b) Vis ved induksjon at

$$(K^n x)(t) = \int_0^t e^{t-s} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s) ds$$

for $n \geq 1$. Bruk dette til å vise at $\|K^n\| \leq \frac{e}{n!}$ for $n \geq 1$.

c) Finn $\sum_{n=0}^{\infty} K^n x$ når $x(t) = e^t,\ 0 \leq t \leq 1,\ (K^0 = I)$.

Oppgave 4 La H og K være Hilbert-rom og la $A : H \to K$ være en kompakt operator.

a) Vis at A^*A er kompakt og Hermitisk, og at egenverdiene til A^*A er større enn eller lik 0. (Her er A^* den adjungerte til A.)

b) La $(e_n)_n$ være egenvektorer for A^*A som i spektralteoremet. Uttrykk A^*Ax ved e_n-ene og de tilhørende egenverdiene λ_n.

c) Anta alle $\lambda_n > 0$ og la $f_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} A e_n \in K$. Vis at $(f_n)_n$ er en ortonormal følge i K og at $Ax = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle f_n$ for alle $x \in H$.