Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad 73 59 35 36

Hjelpemidler: - Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Onsdag 7. august 1996
Tid: 09.00-13.00

Oppgave 1

a) Forklar hva som menes med et indreproduktrom. Hvordan er den avledete normen definert? Er normen $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)^T)$ på $\mathbf{C}^n$ avledet av et indreprodukt?

b) La normen $\|\ \|$ på V være avledet av et indreprodukt. Vis at hvis $x, y \in V$ med $\|x+y\| = 2\|x\| = 2\|y\|$, så er $x = y$.

Oppgave 2

La $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ være en ortonormal følge i et Hilbert-rom H og la $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge av komplekse tall slik at $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Vis at da fins en $x \in H$ slik at $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n = x$.

Oppgave 3

a) Referer Banachs fikspunktteorem.

b) La $A = [a_{ij}]$ være en reell $n \times n$-matrise og la $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være lineæroperatoren gitt ved $Tx = Ax$ der $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Finn $\|T\|$ når $\mathbf{R}^n$ har normen $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

c) Begrunn at Jacobi-iterasjon kan brukes til å løse ligningssystemet ($x_i \in \mathbf{R}$)

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
6x_1 & = & & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 12 \\
3x_2 & = & x_1 & & & + & x_3 & & & + & 3 \\
4x_3 & = & x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & + & 8 \\
5x_4 & = & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & - & 5
\end{array}$$

Oppgave 4

La Volterra-operatoren $V : L^2(a,b) \to L^2(a,b),\ a < b$, være gitt ved

$$(Vx)(t) = \int_a^t x(s)ds \quad , \quad a < t < b.$$

a) Vis at V er en begrenset operator med $\|V\| \leq \dfrac{b-a}{\sqrt{2}}$.

b) Vis at den adjungerte til V er gitt ved

$$(V^*x)(t) = \int_t^b x(s)ds \quad , \quad a < t < b.$$

Oppgave 5

La H være et Hilbert-rom og la A_n ($n \geq 1$) og A være operatorer i $\mathcal{L}(H)$.

a) Vis at for utsagnene

i) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ i $\mathcal{L}(H)$

ii) For alle $x \in H$ er $\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$

iii) For alle $x, y \in H$ er $\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$

gjelder i) $\Rightarrow$ ii) og ii) $\Rightarrow$ iii).

La $(e_n)_{n=1}^\infty$ være en ortonormal følge i H og definer $A_n \in \mathcal{L}(H),\ n \geq 1$, ved $A_n x = \langle x, e_1\rangle e_n$, $x \in H$.

b) Vis at iii) i a) holder for følgen $(A_n)_{n=1}^\infty$ med en passende A, mens i) ikke gjør det. Hva med ii)?

c) Finn de adjungerte operatorene A_n^* og avgjør hvilke av utsagnene i) – iii) følgen $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ oppfyller.