Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen   73 59 35 28

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 22. mai 1997
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

a) Forklar hva som menes med et normert rom. Hvordan er den avledete metrikken definert?

b) La d være en metrikk på et vektorrom V. Vis at dersom d oppfyller betingelsene

i) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$
ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$

for alle $x, y, z \in V$ og alle skalarer λ, så kan d avledes av en norm på V.

Oppgave 2

Bestem skalarene $a, b \in \mathbb{C}$ slik at integralet $\int_0^1 |t - a - bt^2|^2 dt$ minimaliseres.

Oppgave 3

La $C[0,1]$ være utstyrt med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$, og la operatoren $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 t\, s\, x(s) ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) Vis at K er begrenset og finn $\|K\|$.

b) Løs integralligningen

$$x(t) = 1 + \int_0^1 t\,s\,x(s)ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Oppgave 4

La H være et Hilbert-rom over $\mathbb{C}$. La $\varphi, \psi \in H$ begge være $\neq 0$ og definer operatoren $A : H \to H$ ved $Ax = \langle x, \varphi \rangle\, \psi$.

a) Vis at $\|A\| = \|\varphi\|\,\|\psi\|$.

b) Finn et uttrykk for den adjungerte operatoren A^*, og vis at A er Hermitisk hvis og bare hvis det fins en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $\varphi = \lambda\psi$.

La operatoren $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s)ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

c) Bruk a) til å vise at $\|K\| = \sinh 1 \big(= \dfrac{e - e^{-1}}{2} \big)$.

Oppgave 5

a) Referer Riesz' representasjonsteorem (The Riesz-Fréchet theorem).

La den lineære funksjonalen $\varphi : l^2 \to \mathbb{C}$ være gitt ved $\varphi(e_n) = \alpha^{n-1}$, der $|\alpha| < 1$ og $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots)$ osv.

b) Vis at φ er en begrenset og uttrykk φ som i Riesz' representasjonsteorem. Finn $\|\varphi\|$.

c) La $A : l^2 \to l^2$ være gitt ved $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$, der $x = \sum x_n e_n$ og $(\lambda_n)_n$ er en begrenset følge av komplekse tall. Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse på $(\lambda_n)_n$ for at A skal være en Hilbert-Schmidt operator.

d) Finn egenverdiene og spekteret til operatoren A i c) når $\lambda_n = \alpha^{n-1}$, der $\alpha \in (0, 1)$, dvs. $0 < \alpha < 1$.