Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 5. august 1997
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

a) Forklar hva som menes med et komplett metrisk rom.

b) La (X, d) være et metrisk rom der enhver Cauchy-følge har en konvergent delfølge. Vis at X er komplett.

Oppgave 2

a) Gjengi Banachs fikspunktteorem for en kontraksjon på et komplett metrisk rom. Bruk teoremet til å vise at dersom $X \neq \emptyset$ er et komplett metrisk rom og $F : X \to X$ er slik at F^n er en kontraksjon for en $n \geq 1$, da har F nøyaktig ett fikspunkt.

b) La $C[0,2]$ være utstyrt med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ og la $F : C[0,2] \to C[0,2]$ være gitt ved

$$(Fx)(t) = t + \int_0^t x(s)ds, \; 0 \leq t \leq 2.$$

Vis at F^4 er en kontraksjon og løs ligningen $Fx = x$.
(Hint: Vis først at for $n \geq 1$ er $|(F^n x)(t) - (F^n y)(t)| \leq \frac{t^n}{n!}\|x - y\|_\infty$, $0 \leq t \leq 2$.)

Oppgave 3

La operatoren $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^t sx(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

a) Vis at K er begrenset med $\|K\| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

b) Vis at den adjungerte til K er gitt ved

$$(K^*x)(t) = t\int_t^1 x(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Oppgave 4

La E være et Banach-rom og la $A, B \in \mathcal{L}(E)$.

a) Vis at dersom A er kompakt, så er AB og BA begge kompakte.

b) Avgjør om følgende implikasjon er riktig eller gal - gi et bevis eller et moteksempel.

$$AB \text{ kompakt } \Rightarrow A \text{ kompakt eller } B \text{ kompakt.}$$

Oppgave 5

La H være et Hilbert-rom og la $A : H \to H$ være en kompakt Hermitisk operator. Vis at dersom det fins en $n \geq 1$ slik at $A^n = 0$, da er $A = 0$.