Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 5. mai 1998
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1
Bestem $a, b \in \mathbb{C}$ slik at $\int_{-1}^{1} |e^t - a - bt|^2 dt$ blir minimal. Hva blir minimumsverdien?

Oppgave 2
La E være et normert rom over $\mathbb{C}$.

a) Hvordan er $\|A\|$ definert når $A \in \mathcal{L}(E)$. Vis at $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ hvis også $B \in \mathcal{L}(E)$.

b) La $A_n \in \mathcal{L}(E)$ for $n \geq 1$. Vis at $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ i $\mathcal{L}(E) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ for alle $x \in E$.

c) Hva vil det si at $A \in \mathcal{L}(E)$ er invertibel? Vis at $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$ hvis $A \in \mathcal{L}(E)$ er invertibel.

d) La E være et Banachrom. Hvordan er spekteret til $A \in \mathcal{L}(E)$ definert? Vis at $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$.

Oppgave 3
La $A = [a_{jk}]$ være en kompleks $n \times n$-matrise, og la $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være lineæroperatoren gitt ved $Tx = Ax$ der $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

a) Vis at $\|T\| = \max_{1\leq j\leq n}(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{kj}|)$ når $\mathbb{C}^n$ har normen gitt ved $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.

b) La $b \in \mathbb{C}^n$. Begrunn at ligningssystemet $(I-A)x = b$ kan løses ved iterasjon hvis matrisen A er slik at $\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ for $j = 1, 2, \cdots, n$.

Oppgave 4
La $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ være en kontinuerlig funksjon som oppfyller $k(t,s)k(s,u) = k(t,u)$ for alle $s, t, u \in [0,1]$. La $\alpha = \max_{0 \leq s,t \leq 1} |k(t,s)|$.

La $C[0,1]$ ha maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ og la $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være integraloperatoren gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

a) Vis at $\|K\| = 2\ln 2$ hvis $k(t,s) = \frac{1+t}{1+s}$.

b) Vis ved induksjon at

$$(K^n x)(t) = \int_0^t k(t,s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}x(s)ds$$

for $n \geq 1$.

c) Vis at $\|K^n\| \leq \dfrac{\alpha}{n!}$ og forklar hvorfor rekka $\sum_{n=0}^{\infty} K^n x$ konvergerer for alle $x \in C[0,1]$. Finn summen av rekka når $x(t) = k(t,0), \;\; 0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 5
La H være et uendeligdimensjonalt Hilbertrom og la $A : H \to H$ være en kompakt operator. Vis at $0 \in \sigma(A)$.