Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Mandag 17. august 1998
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

Bestem $a, b \in \mathbb{C}$ slik at $\displaystyle\int_0^{2\pi} |x(t) - a\cos t - b\sin t|^2\, dt$ blir minimal når x er gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & \alpha < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

der $\alpha \in [0, 2\pi]$ er en konstant.

Oppgave 2

a) Forklar hva som menes med et indreproduktrom. Hvordan er den avledete normen definert? Er normen gitt ved $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|$ $(x = (x_1, \ldots, x_n)^T)$ på $\mathbb{C}^n$ avledet av et indreprodukt?

b) La V være et indreproduktrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og avledet norm $\|\cdot\|$. Vis at hvis $x, y \in V$ oppfyller $2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$, da er $x = y$.

Oppgave 3

La $A = [a_{jk}]$ være en kompleks $n \times n$-matrise, og la $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være lineæroperatoren gitt ved $Tx = Ax$ der $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

a) Vis at $\|T\| = \max\limits_{1\leq j\leq n} (\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|)$ når $\mathbb{C}^n$ har normen gitt ved $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|$.

b) La $b \in \mathbb{C}^n$. Begrunn at ligningssystemet $(I + A)x = b$ har en entydig løsning x^* hvis A er slik at $\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| < 1$ for $j = 1, 2, \dots, n$.

Oppgave 4

La $C[0,1]$ ha maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ og la $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være integraloperatoren gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)\,ds,\ \ 0 \le t \le 1,$$

der $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ er kontinuerlig.

a) Vis at K er begrenset. Finn $\|K\|$ når $k(t,s) = t - s$.

b) Vis ved induksjon at for $n \ge 1$ er

$$(K^n x)(t) = \int_0^t k_n(t,s)x(s)\,ds$$

der $k_1(t,s) = k(t,s)$ og $k_{n+1}(t,s) = \displaystyle\int_s^t k(t,\tau)k_n(\tau,s)\,d\tau.$

c) La $n \ge 1$. Vis at $k_n(t,s) = \dfrac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ når $k(t,s) = t - s$, og at da er $\|K^n\| = \dfrac{1}{(2n)!}$.

[Hint: Vis formelen for $k_n(t,s)$ ved induksjon. Bruk delvis integrasjon med $u = t - \tau$ og $v' = k_n(\tau,s)$ i formelen for k_{n+1} i b).]

d) La $k(t,s) = t - s$. Forklar hvorfor rekka $\sum_{n=0}^{\infty} K^n x$ konvergerer for alle $x \in C[0,1]$. Finn summen av rekka når $x(t) = 1$ for alle $t \in [0,1]$.

Oppgave 5

La H være et Hilbertrom ($H \neq \{0\}$) og la $A : H \to H$ være en kompakt, Hermitisk operator. Vis at $\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$ der $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ er egenverdiene til A.