Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 7359 3525

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 4. mai 1999
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: A1
– Ingen kalkulator tillatt
– Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Alle svar må begrunnes

Oppgave 1 Bestem $f \in L^2[0,1]$ slik at

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 3, \quad \int_0^1 f(t)t\,dt = 1,$$

og $\int_0^1 |f(t)|^2\,dt$ er minst mulig.

Oppgave 2

a) Hva sier Banachs fikspunktsats? Forklar (uten bevis) hvordan en kan finne løsningen ved iterasjon.

Utstyr $C[0,1]$ med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ og la $K\colon C[0,1] \to C[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 \min(s,t)x(s)\,ds.$$

b) Bestem $\|K\|$ med hensyn på denne normen.

c) Vis at det finnes én og kun én løsning til $\hat{x} - \frac{1}{2}K\hat{x} = 1$, og forklar hvordan du kan finne en tilnærming $\tilde{x}$ til løsningen $\hat{x}$ slik at $|\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)| \le \frac{1}{8}$ for alle $t \in [0,1]$. Du trenger ikke regne ut $\tilde{x}$, men gi feilestimatet eksplisitt.

Oppgave 3 Skiftoperatoren $S\colon l^2 \to l^2$ er definert ved $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$.

a) Bestem egenverdiene og spektret til den baklengse skiftoperatoren S^*.

b) Vis at dersom A er en invertibel operator på et Hilbertrom H så er også A^* invertibel, med invers $(A^{-1})^*$. (Hint: Betrakt $\langle x, (A^{-1})^* A^* y\rangle$.)

c) Bestem egenverdiene og spektret til S.

Oppgave 4

a) En delmengde $A \subseteq X$ i et metrisk rom (X, d) kalles *tett* dersom $\overline{A} = X$. La nå A være en slik tett delmengde. Anta at f og g er to kontinuerlige funksjoner fra X til et annet metrisk rom (Y, ρ) slik at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in A$. Vis at da er $f(x) = g(x)$ for alle $x \in X$.

Som vanlig utstyrer vi $L^2(\mathbb{R})$ med indreproduktet $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. La G bestå av alle funksjoner $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som er deriverbare overalt, med en kontinuerlig derivert, og som er null utenfor et begrenset intervall. G er et tett underrom av $L^2(\mathbb{R})$ (du skal ikke vise dette).

b) Vis at dersom $f \in G$ er

$$\langle f, \varphi'\rangle + \langle f', \varphi\rangle = 0 \quad \text{for alle } \varphi \in G. \tag{$*$}$$

En funksjon $f \in L^2(\mathbb{R})$ kalles *svakt deriverbar* dersom det finnes en $g \in L^2(\mathbb{R})$ slik at

$$\langle f, \varphi'\rangle + \langle g, \varphi\rangle = 0 \quad \text{for alle } \varphi \in G. \tag{$**$}$$

c) Vis at det ikke kan finnes mer enn én funksjon g som oppfyller $(**)$.

Fra nå av vil vi kalle funksjonen g i definisjonen ovenfor *den deriverte* til f og skrive $g = f'$, slik at $(*)$ holder per definisjon for svakt deriverbare funksjoner. La H være rommet av svakt deriverbare funksjoner, og utstyr H med indreproduktet

$$\langle f, g\rangle_1 = \langle f, g\rangle + \langle f', g'\rangle$$

der indreproduktene på høyresiden er vanlige L^2–indreprodukt.

d) Vis at H er komplett i normen avledet av $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. Du kan bruke, uten bevis, at $L^2(\mathbb{R})$ er komplett.