**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag 7359 3521

# EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 10. august 1999
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: A1
– Ingen kalkulator tillatt
– Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

**Alle svar må begrunnes**

**Oppgave 1** Bestem $a, b \in \mathbb{C}$ slik at $\int_{-1}^{1} |e^t - a - bt|^2\, dt$ blir minimal. Hva blir minimumsverdien?

**Oppgave 2** For en kontinuerlig funksjon $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ defineres

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

**a)** Vis at dette gir en norm for vektorrommet av slike funksjoner.

**b)** Forklar hva som menes med et Banachrom, og vis at rommet ikke er et Banachrom.

**c)** Vis også at normen ikke kan avledes fra noe indreprodukt.

**Oppgave 3** Integraloperatoren $K\colon C[0,1] \to C[0,1]$ er gitt ved at

$$Kx(t) = \int_0^1 s \ln\left(\frac{s}{t}\right) x(s)\, ds \qquad (0 < t \le 1).$$

**a)** Bestem normen $\|K\|$ (der vi bruker maksimumsnormen på $C[0,1]$ som vanlig).

**b)** Finn en potensrekkeløsning (i $t$) av integralligningen

$$x(t) = 1 + Kx(t) \qquad (0 \le t \le 1).$$

**Oppgave 4** La $E$ være et Banachrom og la $A$ og $B$ være begrensede lineæroperatorer $E \to E$. Vis at dersom $A$ er kompakt, så er $AB$ og $BA$ begge kompakte.

**Oppgave 5** La $H$ være et uendeligdimensjonalt Hilbertrom og la $A\colon H \to H$ være en kompakt, Hermitisk operator.

**a)** Hva sier spektralteoremet om $A$?

**b)** Vis at $0 \in \sigma(A)$.

**c)** Vis at dersom $A$ i tillegg er positiv semidefinit, dvs. $\langle Ax, x\rangle \ge 0$ for alle $x \in H$, så er egenverdiene $\ge 0$ og det finnes en kompakt, Hermitisk operator $B$ slik at $B^2 = A$.