Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hag 7359 3521

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 5. august 2000
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: A1
– Ingen kalkulator tillatt
– Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Alle svar må begrunnes

Oppgave 1 Finn $a, b \in \mathbb{C}$ slik at $\displaystyle\int_0^1 |x^3 - a - bx|^2\,dx$ minimaliseres.

Oppgave 2 La l^∞ betegne rommet av begrensede tallfølger $x = (x_1, x_2, \ldots)$ med supremumsnormen

$$(*) \qquad \|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

a) Vis at $(*)$ definerer en norm. Hva er den avledede (induserte) metrikken?

b) Forklar hva som menes med et komplett metrisk rom, og vis at l^∞ er komplett.

c) Kan normen i l^∞ avledes av et indreprodukt? (*Hint*: Parallellogramloven!)

Oppgave 3

a) La $u_1, \ldots, u_n$ være lineært uavhengige vektorer i et indreproduktrom H. Vis at $n \times n$–matrisen G med elementer $g_{jk} = \langle u_j, u_k \rangle$ er positivt definit.

b) Under betingelsene i punkt a), la $y \in H$. Vis at vektoren i $\text{lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$ som er nærmest y er $\sum_{j=1}^n c_j u_j$, der skalarene c_j oppfyller ligningssystemet (*normalligningene*)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, u_k \rangle = \langle y, u_k \rangle, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Oppgave 4 Skiftoperatoren $S\colon l^2 \to l^2$ er definert ved $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

a) Gi en eksplisitt formel for den adjungerte S^* til S.

b) Bestem egenverdiene og spektret til S^*.

c) Vis at dersom A er en invertibel operator på et Hilbertrom H så er også A^* invertibel, med invers $(A^{-1})^*$. (Hint: Betrakt $\langle x, (A^{-1})^* A^* y \rangle$.)

d) Bestem egenverdiene og spektret til S.