75033 Lineær analyse 8. august 2000

Løsningsforslag

Oppgave 1

I $L^2[0,1]$, la $u_j(x) = x^j$. Merk at

$$\langle u_j, u_k \rangle = \int_0^1 x^{j+k}\,dx = \frac{1}{j+k+1}.$$

Oppgaven er å finne vektoren i $\operatorname{lin}\{u_0, u_1\}$ nærmest u_3. Vi kan stille opp normalligningene (oppgave 3a):

$$\begin{aligned} a\langle u_0, u_0\rangle + b\langle u_1, u_0\rangle &= \langle u_3, u_0\rangle, \\ a\langle u_0, u_1\rangle + b\langle u_1, u_1\rangle &= \langle u_3, u_1\rangle, \end{aligned}$$

altså

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}b &= \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b &= \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

med løsning

$$a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{9}{10}.$$

Alternativt: Gram-Schmidt på u_0, u_1 gir

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0/\|u_0\| = u_0, \\ \tilde{v}_1 &= u_1 - \langle u_1, v_0\rangle v_0 = u_1 - \tfrac{1}{2}u_0, \\ \|\tilde{v}_1\| &= \|u_1\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u_1, \tfrac{1}{2}u_0\rangle + \|\tfrac{1}{2}u_0\|^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}, \\ v_1 &= \tilde{v}_1/\|\tilde{v}_1\| = 2\sqrt{3}(u_1 - \tfrac{1}{2}u_0). \end{aligned}$$

Nå er v_0, v_1 en ortonormal basis for $\operatorname{lin}\{u_0, u_1\}$, og vektoren i $\operatorname{lin}\{u_0, u_1\}$ nærmest u_3 er

$$\begin{aligned} \langle u_3, v_0\rangle v_0 + \langle u_3, v_1\rangle v_1 &= \langle u_3, v_0\rangle v_0 + 12\langle u_3, u_1 - \tfrac{1}{2}u_0\rangle(u_1 - \tfrac{1}{2}u_0) \\ &= \tfrac{1}{4}u_0 + 12(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{8})(u_1 - \tfrac{1}{2}u_0) \\ &= -\tfrac{1}{5}u_0 + \tfrac{9}{10}u_1 \end{aligned}$$

slik at $a = -1/5$, $b = 9/10$ som før.

Oppgave 2

a 1. Det er klart at $\|x\| \geq 0$ for $x \in l^\infty$, og dersom $\|x\| = 0$ er $x_n = 0$ for alle n, slik at $x = 0$.

2. Om $t \in \mathbb{C}$, $x \in l^\infty$ er

$$\|tx\| = \sup_k |tx_k| = |t| \sup_k |x_k| = |t| \cdot \|x\|.$$

3. Om $x, y \in l^\infty$ er $|x_k| \leq \|x\|$ og $|y_k| \leq \|y\|$ for alle k, slik at

$$\|x + y\| = \sup_k |x_k + y_k| \leq \sup_k |x_k| + |y_k| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Den avledede metrikken er gitt ved

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sup_k |x_k - y_k|.$$

b En Cauchy-følge i et metrisk rom (X, d) er en følge (x_n) i X slik at for hver $\varepsilon > 0$ finnes N slik at $m, n \geq N$ medfører $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. (X, d) kalles komplett dersom enhver Cauchy-følge i X er konvergent.

La $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en Cauchy-følge i l^∞; skriv $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots)$. Hold k fast. Siden $|x_{mk} - x_{nk}| \leq \|x_m - x_n\|$ er det klart at følgen $(x_{1k}, x_{2k}, \ldots)$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{C}$. Siden $\mathbb{C}$ er komplett er følgen konvergent. Skriv

$$y_k = \lim_{n \to \infty} x_{nk}.$$

Siden $|x_{nk}| \leq \|x_n\|$ og enhver Cauchy-følge er begrenset, det vil si det finnes M slik at $\|x_n\| \leq M$ for alle n, er $|y_k| \leq M$, slik at følgen $y = (y_1, y_2, \ldots)$ tilhører l^∞.

Vi skal vise at $x_n \to y$ i l^∞. La $\varepsilon > 0$, og velg N slik at $m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$. For hver k er da $|x_{mk} - x_{nk}| < \varepsilon$. La $n \to \infty$, og få $|x_{mk} - y_k| \leq \varepsilon$. Siden dette holder for alle k, er $\|x_m - y\| \leq \varepsilon$. Og siden dette gjelder alle $m \geq N$, viser dette at $x_n \to y$ i l^∞. Dette viser at l^∞ er komplett.

c Parallellogramloven $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ gjelder i alle indreproduktrom. Velger vi for eksempel

$$x = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad y = (0, 1, 0, 0, \ldots)$$

så er $\|x\| = \|y\| = \|x + y\| = \|x - y\| = 1$, og parallellogramloven holder ikke. Normen i l^∞ kan derfor ikke avledes av et indreprodukt.

Oppgave 3

a La $\xi \in \mathbb{C}^n$. Vi finner

$$\begin{aligned}\xi^{\mathrm{H}} G \xi &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_j g_{jk} \xi_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{\xi}_j u_j, \bar{\xi}_k u_k \rangle \\ &= \Bigl\| \sum_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j u_j \Bigr\|^2 > 0 \quad \text{når } \xi \neq 0,\end{aligned}$$

siden $u_1, \ldots, u_n$ er lineært uavhengige. Dette viser at G er positivt definit.

b Vektoren $z \in \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$ nærmest y kjennetegnes ved at $z - y \perp \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$. Spesielt er $z - y \perp u_k$ for $1 \leq k \leq n$. Skriver vi $z = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$ gir dette

$$0 = \Bigl\langle \sum_{j=1}^{n} c_j u_j - y, u_k \Bigr\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, u_k \rangle - \langle y, u_k \rangle$$

som er den søkte identiteten.

Oppgave 4

a S^* er definert ved at $\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle$ for alle $x, y \in l^2$. Vi finner

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle = \langle (0, x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_{j+1} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} x_{j-1}\bar{y}_j = \langle (x_1, x_2, \ldots), (y_2, y_3, \ldots)\rangle\end{aligned}$$

slik at $S^*y = (y_2, y_3, \ldots)$. [$S^*$ kalles den baklengse skiftoperatoren.]

b $S^*y = \lambda y$ gir $y_{j+1} = \lambda y_j$ for $j = 1, 2, \ldots$, slik at $y_j = \lambda^{j-1}y_1$. Dermed er (forutsatt $y_1 \neq 0$) $\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^{2(j-1)}|y_1| < \infty \Leftrightarrow |\lambda| < 1$. Vi får altså en egenvektor i l^2 hvis og bare hvis $\lambda < 1$, så egenverdiene til S^* er $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| < 1\}$.

Det er klart at $\|Sx\| = \|x\|$ for alle x, slik at $\|S\| = 1$, og dermed også $\|S^*\| = 1$. Derfor er spektret inneholdt i $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq 1\}$, men siden det er lukket og inneholder alle egenverdiene, må $\sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq 1\}$.

c Om A er invertibel, så er for alle $x, y \in H$:

$$\langle x, (A^{-1})^*A^*y\rangle = \langle A^{-1}x, A^*y\rangle = \langle AA^{-1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Spesielt er da $(A^{-1})^*A^*y = y$, ved entydighetsdelen av Riesz representasjonsteorem. Siden dette holder for alle y er $(A^{-1})^*A^* = I$. Vi kan gjøre det samme med A og A^{-1} byttet om, og få $A^*(A^{-1})^* = I$. Dette viser at $(A^{-1})^*$ er en invers for A^*.

d $Sx = \lambda x$ gir $\lambda x_1 = 0$ og $\lambda x_{j+1} = x_j$ for $j = 1, 2, \ldots$. Dette gir $x_j = 0$ (direkte om $\lambda = 0$, ved induksjon om $\lambda \neq 0$) så S har ingen egenverdier.

Etter punkt c har vi

$$\begin{aligned}\sigma(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda I - S \text{ er ikke invertibel}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}\colon (\lambda I - S)^* \text{ er ikke invertibel}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \bar{\lambda} I - S^* \text{ er ikke invertibel}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \bar{\lambda} \in \sigma(S^*)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| \leq 1\}.\end{aligned}$$