UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Faye Knudsen (59)3523/20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 6. juni 1992
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1

La l^∞ betegne rommet av begrensede (engelsk: "bounded") tallfølger $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$ med supremumsnorm

$$(*) \qquad \|x\| = \sup_{k \in \boldsymbol{N}} |\xi_k|$$

a) Vis at (*) definerer en norm. Hva er den avledete (induserte) metrikken?

b) Forklar hva som menes med et komplett metrisk rom, og vis at l^∞ er komplett.

c) Er normen i l^∞ avledet av et indreprodukt? (Begrunn svaret.)

Oppgave 2

a) Gi definisjonen av en kontraksjon på et metrisk rom. Referer Banach's fikspunktteorem for en kontraksjon på et komplett metrisk rom.

b) Vis at Volterra operatoren $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ gitt ved

$$Vx(t) = \int_0^t x(s)ds \quad ; \quad 0 \le t \le 1$$

har norm mindre enn 1.

c) Finn en kontinuerlig funksjon x på intervallet $[0,1]$ som tilfredsstiller integralligningen

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds \quad ; \quad 0 \le t \le 1.$$

Er løsningen entydig?

Oppgave 3

Finn $a, b \in \boldsymbol{C}$ slik at $\int_0^1 |x^3 - a - bx|^2 dx$ minimaliseres.

Oppgave 4

La operatoren $D : l^2 \to l^2$ være definert ved

$$D(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_k}{k}, \cdots)$$

Finn egenverdiene og spektret til D.

(l^2 er Hilbertrommet av alle tallfølger $x = (\xi_k)$ slik at $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2 < \infty$ med indreproduktet $< x, y >= \sum_{k=1}^\infty \xi_k \bar{\eta}_k$).

Oppgave 5

La H^* betegne rommet av kontinuerlige lineærfunksjonaler på Hilbertrommet H og vis følgende:

Dersom x er et element i H og (x_n) er en følge fra H slik at $\|x_n\| \to \|x\|$ og $F(x_n) \to F(x)$ for alle $F \in H^*$, så vil $x_n \to x$.
(Vink : Se på $\|x - x_n\|^2$)

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Kari Hag (59)3521

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 11. august 1992
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1 For en reellvaluert, kontinuerlig funksjon f på enhetsintervallet $[0,1]$ defineres

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

a) Vis at dette gir en norm for vektorrommet av slike funksjoner.

b) Forklar hva som menes med et komplett normert rom, og vis at rommet ikke er komplett.

c) Vis også at normen ikke kan avledes fra noe indreprodukt.

Oppgave 2

a) La E være et komplett normert rom. Referer Banachs fikspunkt sats for en kontraksjon på E.

b) Den lineære operatoren $T : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ er definert ved:

$$Tx = Ax^T \quad \text{der} \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

og A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\|T\| < 1$ når $\boldsymbol{R}^4$ er forsynt med maksimumsnormen, dvs. $\|x\| = \max_j |x_j|$.

c) Begrunn at likningssystemet

$$\begin{aligned} 4x_1 &= \phantom{2x_1 - {}} x_2 - x_3 + x_4 - 12 \\ 5x_2 &= 2x_1 \phantom{{}- x_2} + 2x_3 \phantom{{}+x_4} + 10 \\ 6x_3 &= 3x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} - x_4 - 18 \\ 4x_4 &= x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} - 8 \end{aligned}$$

kan løses ved iterasjon med utgangspunkt i $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Oppgave 3 I denne oppgaven er X et indreproduktrom.

a) Vis ut fra aksiomene for et indreproduktrom at når a og b er ortogonale vektorer i X vil

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

b) La $x \in X$ og sett $y_0 = \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k$ der $e_1, ..., e_n$ er ortonormale vektorer i X. Vis at $x - y_0$ er ortogonal til alle vektorer y i rommet utspent av $e_1, ..., e_n$, og etabler ulikheten

$$\|x - y_0\| < \|x - y\|, \quad y \ne y_0.$$

c) La nå $X = \boldsymbol{C}^4$ og finn vektoren som ligger nærmest $(1,2,3,4)$ i rommet utspent av $(1,0,1,0)$ og $(1,1,1,1)$.

Oppgave 4 Hva sier spektralteoremet for en kompakt Hermitisk operator K på et Hilbertrom H?

Vis at dersom K i tillegg er positiv semidefinitt, dvs. $< Kx, x > \ge 0$ for alle $x \in H$, så er egenverdiene ≥ 0 og det fins en Hermitisk operator A slik at $A^2 = K$.

Faglig kontakt under eksamen:

Finn Faye Knudsen (59)3523/20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Onsdag 2. juni 1993
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1

a) Vis at $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ definerer en metrikk på $\boldsymbol{R}$.

b) Forklar hva som menes med normert rom og avledet metrikk. Er metrikken i a) avledet av en norm?

c) Forklar hva som menes med et indreprodukt rom og avledet norm. Gi et eksempel på et normert rom der normen ikke er avledet av et indreprodukt.

Oppgave 2 La E være et Banach rom, dvs. et komplett normert rom, og $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ en følge fra E slik at rekken $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergerer. Vis at partialsummene $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ er en Cauchyfølge og konkluder at det fins et element $x \in E$ slik at $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Oppgave 3

La $C[-1,1]$ være rommet av kontinuerlige reelle funksjoner på intervallet $[-1,1]$ forsynt med <u>maksimumsnorm</u>.

a) La $F : C[-1,1] \to \boldsymbol{R}$ være gitt ved

$$F(x) = \int_{-1}^{1} k(t)x(t)dt \quad \text{der} \quad k(t) = \begin{cases} -1 & \text{der} \quad -1 \le t \le 0 \\ 1 & \text{for} \quad 0 < 1 \le 1 \end{cases}$$

Vis at F er en begrenset lineærfunksjonal og bestem $\|F\|$.

b) La $A \subseteq C[-1,1]$ være mengden av funksjoner $x(t)$ som tilfredsstiller

$$(*) \qquad F(x) = \int_{-1}^{1} k(t)x(t)dt = 2.$$

Vis at A er ikke-tom, lukket og konveks, men at det ikke fins noe element i A med minst mulig norm. Kunne denne vanskeligheten ha oppstått i et Hilbertrom? (Svaret skal begrunnes.)

Oppgave 4 La H være et separabelt Hilbertrom og $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en komplett ortonormal følge.

a) Forklar hva som menes med at $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en komplett følge. Skriv også ned formelen for hvordan $x \in H$ og $\|x\|^2$ kan uttrykkes v.h.a. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, og indreproduktet i H.

b) La $A \in \mathcal{L}(H)$, dvs. A er en begrenset lineær operator på H, og la $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ være matrisen til A m.h.p. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, dvs.

$$A_{ij} = < Ae_j, e_i > \qquad \text{for alle } i \text{ og } j.$$

Vis at hver søyle og hver linje i matrisen er kvadratisk summerbar, dvs.

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$ for alle j og $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$ for alle i.

c) Gi et eksempel på en diagonalmatrise $[d_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ som ikke er matrisen til en begrenset lineær operator på H (selv om hver søyle og hver linje trivielt er kvadratisk summerbar her). Dersom en generell <u>matrise</u> $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ er kvadratisk summerbar, dvs. $\sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|^2 < \infty$, vil den tilhørende operatoren på H være begrenset? Kompakt? Svarene skal begrunnes.

Oppgave 5 Vis at vektorrommet $W[0,1]$ av av kontinuerlig deriverbare funksjoner $[0,1]$ med verdier i $\boldsymbol{C}$ og med

$$< f, g >_W = \int_0^1 [f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}]dt$$

er et indreproduktrom, dvs. at formelen over definerer et indreprodukt.
Blir differensialoperatoren

$$\frac{d}{dt} : W[0,1] \to L^2[0,1]$$

begrenset? (svaret skal begrunnes).

Faglig kontakt under eksamen:

Anne Kværnø (0759)3542

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 14. august 1993
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Lommekalkulator ikke tillatt.

Oppgave 1

La x, y være elementer i $\boldsymbol{R}^2$. Sett $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, og la
$d_p(x,y) = [|\xi_1 - \eta_1|^p + |\xi_2 - \eta_2|^p]^{1/p}$; $1 \le p < \infty$,
$d_\infty(x,y) = \max(|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|)$.

a) Såvel d_p, $1 \le p < \infty$, som d_∞ er metrikker for $\boldsymbol{R}^2$. Vis dette for d_∞.

b) Skisser enhetssfæren $S(0;1)$ i metrikkene d_1, d_2, d_∞. Vis at $\lim\limits_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$.

Oppgave 2

Anta at X er et metrisk rom der hver Cauchyfølge har en konvergent delfølge. Vis at X er komplett.

Oppgave 3

Gitt det lineære likningssystemet

$$(*) \qquad (I - A)x = b$$

der b er en N-vektor, I er $N \times N$-identitetsmatrisen og $A = [a_{ij}]$ er en reell $N \times N$-matrise slik at $\alpha = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{N} |a_{ij}| < 1$.

a) Vis at $||A|| = \alpha$ når A er matrisemultiplikasjon på $\boldsymbol{R}^N$ forsynt med maksimumsmetrikk ($||x||_\infty = \max\limits_i |\xi_i|$).

b) Begrunn at $(*)$ har en entydig bestemt løsning s og at denne kan finnes ved iterasjon fra et vilkårlig startpunkt x_0 i $\boldsymbol{R}^N$, dvs. $||x_n - s||_\infty \to 0$ der $x_n = b + Ax_{n-1}$.

c) Vis at for alle $n \ge 1$ gjelder

$$||x_n - s||_\infty \le \frac{\alpha}{1-\alpha} ||x_n - x_{n-1}||.$$

Oppgave 4

La A være en Hermitisk operator på et Hilbert rom. Vis at da er alle egenverdiene til A reelle, og egenvektorer svarende til forskjellige egenverdier er ortogonale.

Oppgave 5

La integraloperatoren $K : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+s)x(s)\, ds.$$

a) Vis at 1, $\cos nt$, $\sin nt$, $n \in \boldsymbol{N}$, er egenvektorer til K. Hva blir de tilhørende egenverdiene?

b) For hvilke funksjoner $f \in L^2[-\pi, \pi]$ har likningen

$$Kx = f$$

løsninger? Beskriv løsningsmengden for disse f.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Kari Hag (7359)3521

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 9. juni 1994
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Lommekalkulator ikke tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 La x, y være elementer i $X = \boldsymbol{R}^N$. Sett $x = (x_1, ..., x_N)$, $y = (y_1, ..., y_N)$, og la $d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|$.

a) Vis at (X, d_1) er et komplett metrisk rom. (Du kan anta som kjent at $(\boldsymbol{R}, |\ \ |)$ er det).

b) Hva forstår vi med en indusert metrikk? La Y være mengden av alle ordnede N-tupler av nuller og enere og la $d(x,y)$ = antall plasser der x og y har forskjellige komponenter. Begrunn at (Y, d) er et komplett metrisk rom.

Oppgave 2

a) La $A = [a_{ij}]$ være en $N \times N$-matrise der $\alpha = \max_j \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| < 1$. Vis at $\| A \| = \alpha$ når A er matrisemultiplikasjonsoperatoren på $\boldsymbol{R}^N$ forsynt med normen $\| x \| = \sum_{k=1}^{N} |x_k|$.

b) Begrunn ved Banachs fikspunktteorem at det lineære likningssystemet

$$(I - A)x = b$$

der I er $N \times N$-identitetsmatrisen, A er matrisen fra a) og b er en N-vektor har en entydig bestemt løsning.

c) Avbildingen $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ gitt ved $f(x) = x + \frac{1}{x}$ har ikke noe fikspunkt. Påvis at f ikke er noen kontraksjon. Illustrer også med et eksempel at kompletthet ikke kan sløyfes i Banachs fikspunktteorem.

Oppgave 3 La integraloperatoren $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds \quad \text{der}$$

$$k(t,s) = \begin{cases} (1-t)s; & 0 \le s \le t \\ (1-s)t; & t \le s \le 1 \end{cases}$$

a) Hva sier spektralteorien om egenvektorer og egenverdier for K?
Vis at $\sin n\pi t, n \in \boldsymbol{N}$, er egenvektorer til K og bestem de tilhørende egenverdiene. Har K andre egenvektorer? Begrunn. (Husk at $(\sqrt{2} sin n\pi t)_{n \in \mathbf{N}}$ er en komplett ortonormal følge i $L^2[0,1]$).

b) Diskuter v.hj.a. Fourierteori løsningene til $Kx - \lambda x = f$ der $f \in L^2[0,1]$ for de forskjellige verdier av $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Oppgave 4 La H være et komplekst Hilbertrom og $A : H \to H$ en lineær isometrisk operator, dvs. $\| Ax \| = \| x \|$ for alle $x \in H$. (Høyre skiftoperator er et eksempel på en slik operator.)

a) Vis at A også bevarer indreproduktet, dvs. $< Ax, Ay > = < x, y >$ for alle $x, y \in H$. (Husk polaridentiteten

$$< x, y > = 4^{-1}[(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2) + i(\| x + iy \|^2 - \| x - iy \|^2)]\ )$$

b) Vis at for alle $x \in H$ er $A^*Ax = x$ mens AA^*x er projeksjonen av x på underrommet $M = \{z | z = AA^*y, y \in H\}$.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:

Trond Digernes (7359)3517

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Lørdag 27. august 1994
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: Lommekalkulator ikke tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

a) La X være et komplekst indreproduktrom. Vis at da gjelder følgende formler

(*) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$
(**) $< x, y > = 4^{-1}[(||x + y||^2 - ||x - y||^2) + i(||x + iy||^2 - ||x - iy||^2)]$

(En kan også vise at et normert rom der (*) er oppfylt er et indreproduktrom, men det skal ikke gjøres i denne oppgaven.)

Oppgave 2 La $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ være en ortonormal følge i et Hilbertrom H, og la $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge av komplekse tall slik at $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.
Vis at det fins et element $x \in H$ slik at $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Oppgave 3 La $e_0(t) = 1, e_1(t) = \sqrt{3}(2t - 1)$ der $0 \le t \le 1$. Vis at e_0, e_1 er et ortonormalt system i $L^2[0,1]$ og bestem det lineære polynomet $f(t) = at + b; a, b \in \mathbf{C}$, som minimaliserer $\int_0^1 |t^2 - f(t)|^2 dt$.

Oppgave 4

a) Vis at integraloperatoren $K : C[0,1] \to C[0,1]$ gitt ved

$$Kx(t) = \int_0^t s\, ln(s/t)\, x(s) ds; \quad 0 < t \le 1$$

har norm mindre enn 1. ($C[0,1]$ er utstyrt med maksimumsnorm).

b) Finn en potensrekkeløsning (i t) av integralligningen

$$x(t) = 1 + Kx(t); \quad 0 \le t \le 1.$$

Oppgave 5 La $V : l^2 \to l^2$ være venstre skiftoperator gitt ved $V(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

a) Vis at alle $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $|\lambda| < 1$, er egenverdier til V.

b) Finn spektret til V.

Oppgave 6

a) Gitt et Hilbertom H. La M være et lukket underrom av H, og la operatoren $P : H \to H$ være definert slik: For $x \in H$ er Px det entydig bestemte elementet i M med egenskapen $x - Px \in M^{\perp}$.
Vis at $P \in \mathcal{L}(H), P^2 = P$ og $P^* = P$. (P kalles den ortogonale projeksjonen på M.)

b) Omvendt, gitt $T \in \mathcal{L}(H)$ slik at $T^2 = T$ og $T^* = T$. Vis at T da er den ortogonale projeksjonen på $M = \{Tx : x \in H\}$.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Trond Digernes (73 5) 93517

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 30. mai 1995
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: - Lommekalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 Bestem skalarene $a, b \in \mathbf{C}$ slik at integralet $\int_{-1}^{1} |1 - ax - bx^2|^2 \, dx$ minimaliseres.

Oppgave 2

a) For enhver følge $c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ kan vi definere en avbildning $F_c : \ell^1 \to \mathbf{C}$ ved

$$F_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \,, \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 \,. \tag{1}$$

Vis at F_c blir en begrenset lineær funksjonal på ℓ^1 og at

$$\|F_c\| = \|c\|_{\infty} \,.$$

(Vi minner om at ℓ^1 er Banach-rommet av alle absolutt konvergente komplekse følger $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ med norm $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, og at ℓ^{∞} er Banach-rommet av alle begrensede komplekse følger $c = (c_n)_{n=1}^{\infty}$ med norm $\|c\|_{\infty} = \sup_n |c_n|$; videre: $\|F_c\| = \sup_{\|x\|_1 \le 1} |F_c(x)|$.)

b) La g være en begrenset lineær funksjonal på ℓ^1. Vis at det finnes en følge $c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ slik at $g = F_c$ med F_c som i (1).
[Hint: Betrakt følgen $c = (c_n)_{n=1}^{\infty}$ gitt ved $c_n = g(e_n)$ hvor $e_n \in \ell^1$ er følgen med 1 i n-te posisjon og nuller ellers.]

Oppgave 3

a) La A være en lineær operator med $\|A\| < 1$ på et Hilbert-rom H. Bruk Banach's fikspunkt-teorem til å vise at ligningen

$$x = f + Ax$$

har en éntydig løsning x for enhver gitt $f \in H$. Utled formelen $x = \sum_{n=0}^{\infty} A^n f$ ved hjelp av fikspunkt-teoremets iterasjonsformel ($A^0 = I =$ identitetsoperatoren).

b) Definér hva det vil si at en begrenset lineær operator er invertibel. Bruk resultatet fra **a)** til å vise at operatoren $I - A$ er invertibel og at $\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|}$ når $\|A\| < 1$.

Oppgave 4

a) La g og h være to vektorer i et Hilbert-rom H, og definér en lineær operator $K : H \to H$ ved

$$Kx = (x,h)g + (x,g)h \,, \qquad x \in H \,,$$

hvor som vanlig (,) betegner indreproduktet. Beskriv nullrommet $\{x \in H; Kx = 0\}$ og rekkevidden $\{Kx; x \in H\}$ til K, og begrunn at K er en kompakt operator. Vis også at K er Hermitisk, dvs. $(Kx, y) = (x, Ky)$ for alle $x, y \in H$.

NB! I resten av denne oppgaven antas at vektorene g og h står ortogonalt på hverandre, dvs. $(g,h) = 0$.

b) Vis at

$$|(x,h)|^2 \|g\|^2 + |(x,g)|^2 \|h\|^2 \le \|x\|^2 \|g\|^2 \|h\|^2$$

for alle $x \in H$. Vis dernest at $\|K\| = \|g\|\|h\|$ (K som i **a**)).

c) Betrakt ligningen

$$x = g + Kx \,,$$

dvs.

$$x = g + (x,h)g + (x,g)h \,. \tag{2}$$

Vis at ligningen (2) har en løsning x hvis og bare hvis $\|g\|\|h\| \ne 1$, og at løsningen er éntydig når den eksisterer. Finn x uttrykt ved g og h når $\|g\|\|h\| \ne 1$.
(Husk at $(g,h) = 0$!)

d) La M være operatoren på $H = L^2[-1,1]$ gitt ved

$$(Mx)(t) = \int_{-1}^{1} (t+s) x(s) \, ds \,, \qquad x \in L^2[-1,1] \,, \quad t \in [-1,1] \,.$$

Bestem to funksjoner g og h med $(g,h) = 0$ slik at

$$Mx = (x,h)g + (x,g)h \,.$$

Begrunn ut fra det som er sagt ovenfor at integralligningen

$$x(t) = t + \int_{-1}^{1} (t+s) x(s) ds \,, \qquad x \in L^2[-1,1] \,, \quad t \in [-1,1] \,,$$

har en éntydig løsning x, og bestem denne.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

Faglig kontakt under eksamen:
Olav Njåstad (73 5) 93513/20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 10. august 1995
Tid: 0900–1300

Hjelpemidler: - Lommekalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 Gitt vektorene $a = (3,0,0)$, $u = (1,i,0)$ og $v = (i,0,1)$ i $\mathbf{C}^3$, utstyrt med sitt vanlige indreprodukt. Finn den vektoren x i underrommet utspent av u og v som ligger nærmest a.

Oppgave 2

a) La S og T betegne henholdsvis høyre og venstre skift-operator på Hilbert-rommet ℓ^2, dvs.,

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \qquad T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

hvor $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$.
Vis at $S^* = T$. Hva er sammenhengen mellom rekkevidden $\mathcal{R}(S)$ til S og nullrommet (kjernen) $\mathcal{N}(T)$ til T?
Beskriv operatorene ST og TS. Er operatorene S og T invertible?
Begrunn svarene.

b) Vis at for enhver begrenset lineær operator A på et Hilbert-rom gjelder at $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^{\perp}$, det ortogonale komplement til $\mathcal{R}(A^*)$ (betegnelser forøvrig som i pkt. **a**).

c) La H være et Hilbert-rom. Avgjør om følgende tre utsagn er riktige for begrensede operatorer A og B på H (alle tre utsagnene er riktige dersom $\dim(H) < \infty$). Hvis utsagnet er riktig, gi et bevis – i motsatt fall, gi et moteksempel:

$$AB \text{ invertibel} \implies A \text{ invertibel og } B \text{ invertibel} \tag{1}$$
$$AB \text{ invertibel} \implies BA \text{ invertibel} \tag{2}$$
$$AB \text{ invertibel og } BA \text{ invertibel} \implies A \text{ invertibel og } B \text{ invertibel} \tag{3}$$

Oppgave 3 Definér hva det vil si at en lineær operator på et normert rom er kompakt.
-La A og B være lineære operatorer på et normert rom. *Vis:* Dersom A er begrenset og B er kompakt, så er operatorene AB og BA begge kompakte.

Oppgave 4

a) Referér Banach's fikspunkt-teorem for en kontraksjon på et komplett metrisk rom. Bruk dette teoremet til å vise følgende påstand: *Anta T er en avbildning av et komplett metrisk rom inn i seg selv, og anta det finnes et naturlig tall N slik at T^N er en kontraksjon. Da har T et éntydig fikspunkt.*

b) Volterra-operatoren V er definert på $C[0,1]$ ved

$$(Vx)(t) = \int_0^t x(s) \, ds, \qquad t \in [0,1], \quad x \in C[0,1] \,.$$

Vis at $\|V\| = 1$ når $C[0,1]$ utstyres med maksimumsnormen $\|\cdot\|_{\infty}$.

c) Vis ved induksjon at

$$(V^n x)(t) = \int_0^t x(s) \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \, ds \,.$$

Bruk så dette til å vise at $\|V^n\| = \frac{1}{n!}$.

d) Bruk resultatene ovenfor til å gjøre rede for at hver av integralligningene

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s) \, ds \tag{4}$$
$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)(t-s) \, ds \tag{5}$$

har entydig løsning i $C[0,1]$.
Løs den siste integralligningen (lign. 5).

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 30. mai 1996
Tid: 09.00-13.00

Oppgave 1 Vis at $\langle x, y\rangle = \int_0^\infty e^{-t}x(t)\overline{y(t)}dt$ definerer et indreprodukt på vektorrommet av polynom (med komplekse koeffisienter).

Bestem $a, b \in \mathbf{C}$ slik at $\int_0^\infty e^{-t}|t^2 - a - bt|^2 dt$ blir minimal. (Det oppgis at $\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!$)

Oppgave 2

a) La (X, d) være et metrisk rom. Vis at dersom følgen $(x_n)_{n=1}^\infty$ fra X er konvergent, så er den en Cauchy-følge.

b) La $(E, \|\ \|)$ være et Banach-rom. Vis at dersom $(x_n)_{n=1}^\infty$ er en følge fra E slik at $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ er konvergent, så konvergerer rekka $\sum_{n=1}^\infty x_n$ i E.

Oppgave 3 La $C[0,1]$ være utstyrt med maksimumsnormen $\|\ \|_\infty$ og la operatoren $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^t e^{t-s}x(s)ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) Vis at K er begrenset og finn $\|K\|$.

b) Vis ved induksjon at

$$(K^n x)(t) = \int_0^t e^{t-s}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}x(s)ds$$

for $n \ge 1$. Bruk dette til å vise at $\|K^n\| \le \frac{e}{n!}$ for $n \ge 1$.

c) Finn $\sum_{n=0}^\infty K^n x$ når $x(t) = e^t$, $0 \le t \le 1$, $(K^0 = I)$.

Oppgave 4 La H og K være Hilbert-rom og la $A : H \to K$ være en kompakt operator.

a) Vis at A^*A er kompakt og Hermitisk, og at egenverdiene til A^*A er større enn eller lik 0. (Her er A^* den adjungerte til A.)

b) La $(e_n)_n$ være egenvektorer for A^*A som i spektralteoremet. Uttrykk A^*Ax ved e_n-ene og de tilhørende egenverdiene λ_n.

c) Anta alle $\lambda_n > 0$ og la $f_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}Ae_n \in K$. Vis at $(f_n)_n$ er en ortonormal følge i K og at $Ax = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\langle x, e_n\rangle f_n$ for alle $x \in H$.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad 73 59 35 36

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Onsdag 7. august 1996
Tid: 09.00-13.00

Oppgave 1

a) Forklar hva som menes med et indreproduktrom. Hvordan er den avledete normen definert? Er normen $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)^T)$ på $\mathbf{C}^n$ avledet av et indreprodukt?

b) La normen $\|\ \|$ på V være avledet av et indreprodukt. Vis at hvis $x, y \in V$ med $\|x + y\| = 2\|x\| = 2\|y\|$, så er $x = y$.

Oppgave 2

La $(e_n)_{n=1}^\infty$ være en ortonormal følge i et Hilbert-rom H og la $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ være en følge av komplekse tall slik at $\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$. Vis at da fins en $x \in H$ slik at $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n = x$.

Oppgave 3

a) Referer Banachs fikspunktteorem.

b) La $A = [a_{ij}]$ være en reell $n \times n$-matrise og la $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være lineæroperatoren gitt ved $Tx = Ax$ der $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Finn $\|T\|$ når $\mathbf{R}^n$ har normen $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

c) Begrunn at Jacobi-iterasjon kan brukes til å løse ligningssystemet ($x_i \in \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned}
6x_1 &= 3x_2 - x_3 + x_4 - 12 \\
3x_2 &= x_1 + x_3 + 3 \\
4x_3 &= x_1 + x_2 - x_4 + 8 \\
5x_4 &= x_1 - x_2 + 2x_3 - 5
\end{aligned}$$

Oppgave 4

La Volterra-operatoren $V : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$, $a < b$, være gitt ved

$$(Vx)(t) = \int_a^t x(s)ds \quad , \quad a < t < b.$$

a) Vis at V er en begrenset operator med $\|V\| \le \frac{b-a}{\sqrt{2}}$.

b) Vis at den adjungerte til V er gitt ved

$$(V^*x)(t) = \int_t^b x(s)ds \quad , \quad a < t < b.$$

Oppgave 5

La H være et Hilbert-rom og la A_n $(n \ge 1)$ og A være operatorer i $\mathcal{L}(H)$.

a) Vis at for utsagnene

i) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ i $\mathcal{L}(H)$
ii) For alle $x \in H$ er $\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$
iii) For alle $x, y \in H$ er $\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$

gjelder i) $\Rightarrow$ ii) og ii) $\Rightarrow$ iii).

La $(e_n)_{n=1}^\infty$ være en ortonormal følge i H og definer $A_n \in \mathcal{L}(H)$, $n \ge 1$, ved $A_n x = \langle x, e_1\rangle e_n$, $x \in H$.

b) Vis at iii) i a) holder for følgen $(A_n)_{n=1}^\infty$ med en passende A, mens i) ikke gjør det. Hva med ii)?

c) Finn de adjungerte operatorene A_n^* og avgjør hvilke av utsagnene i) – iii) følgen $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ oppfyller.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Torsdag 22. mai 1997
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

a) Forklar hva som menes med et normert rom. Hvordan er den avledete metrikken definert?

b) La d være en metrikk på et vektorrom V. Vis at dersom d oppfyller betingelsene

i) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$
ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$

for alle $x, y, z \in V$ og alle skalarer λ, så kan d avledes av en norm på V.

Oppgave 2

Bestem skalarene $a, b \in \mathbb{C}$ slik at integralet $\int_0^1 |t - a - bt^2|^2 dt$ minimaliseres.

Oppgave 3

La $C[0,1]$ være utstyrt med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$, og la operatoren $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 t\, s\, x(s) ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) Vis at K er begrenset og finn $\|K\|$.

b) Løs integralligningen

$$x(t) = 1 + \int_0^1 t\, s\, x(s) ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Oppgave 4

La H være et Hilbert-rom over $\mathbb{C}$. La $\varphi, \psi \in H$ begge være $\neq 0$ og definer operatoren $A : H \to H$ ved $Ax = \langle x, \varphi\rangle\, \psi$.

a) Vis at $\|A\| = \|\varphi\|\,\|\psi\|$.

b) Finn et uttrykk for den adjungerte operatoren A^*, og vis at A er Hermitisk hvis og bare hvis det fins en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $\varphi = \lambda\psi$.

La operatoren $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

c) Bruk a) til å vise at $\|K\| = \sinh 1 \left(= \dfrac{e - e^{-1}}{2}\right)$.

Oppgave 5

a) Referer Riesz' representasjonsteorem (The Riesz-Fréchet theorem).

La den lineære funksjonalen $\varphi : l^2 \to \mathbb{C}$ være gitt ved $\varphi(e_n) = \alpha^{n-1}$, der $|\alpha| < 1$ og $e_1 = (1,0,0,\cdots)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots)$ osv.

b) Vis at φ er en begrenset og uttrykk φ som i Riesz' representasjonsteorem. Finn $\|\varphi\|$.

c) La $A : l^2 \to l^2$ være gitt ved $Ax = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n e_n$, der $x = \sum x_n e_n$ og $(\lambda_n)_n$ er en begrenset følge av komplekse tall. Finn en nødvendig og tilstrekkelig betingelse på $(\lambda_n)_n$ for at A skal være en Hilbert-Schmidt operator.

d) Finn egenverdiene og spekteret til operatoren A i c) når $\lambda_n = \alpha^{n-1}$, der $\alpha \in (0,1)$, dvs. $0 < \alpha < 1$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 5. august 1997
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1

a) Forklar hva som menes med et komplett metrisk rom.

b) La (X,d) være et metrisk rom der enhver Cauchy-følge har en konvergent delfølge. Vis at X er komplett.

Oppgave 2

a) Gjengi Banachs fikspunktteorem for en kontraksjon på et komplett metrisk rom. Bruk teoremet til å vise at dersom $X \neq \emptyset$ er et komplett metrisk rom og $F : X \to X$ er slik at F^n er en kontraksjon for en $n \ge 1$, da har F nøyaktig ett fikspunkt.

b) La $C[0,2]$ være utstyrt med maksimumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ og la $F : C[0,2] \to C[0,2]$ være gitt ved

$$(Fx)(t) = t + \int_0^t x(s) ds, \; 0 \le t \le 2.$$

Vis at F^4 er en kontraksjon og løs ligningen $Fx = x$.
(Hint: Vis først at for $n \ge 1$ er $|(F^n x)(t) - (F^n y)(t)| \le \frac{t^n}{n!}\|x - y\|_\infty$, $0 \le t \le 2$.)

Oppgave 3

La operatoren $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ være gitt ved

$$(Kx)(t) = \int_0^t s x(s) ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) Vis at K er begrenset med $\|K\| \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

b) Vis at den adjungerte til K er gitt ved

$$(K^* x)(t) = t \int_t^1 x(s) ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Oppgave 4

La E være et Banach-rom og la $A, B \in \mathcal{L}(E)$.

a) Vis at dersom A er kompakt, så er AB og BA begge kompakte.

b) Avgjør om følgende implikasjon er riktig eller gal - gi et bevis eller et moteksempel.

$$AB \text{ kompakt } \Rightarrow A \text{ kompakt eller } B \text{ kompakt.}$$

Oppgave 5

La H være et Hilbert-rom og la $A : H \to H$ være en kompakt Hermitisk operator. Vis at dersom det fins en $n \ge 1$ slik at $A^n = 0$, da er $A = 0$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Tirsdag 5. mai 1998
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1
Bestem $a, b \in \mathbb{C}$ slik at $\int_{-1}^{1} |e^t - a - bt|^2 dt$ blir minimal. Hva blir minimumsverdien?

Oppgave 2
La E være et normert rom over $\mathbb{C}$.

a) Hvordan er $\|A\|$ definert når $A \in \mathcal{L}(E)$. Vis at $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ hvis også $B \in \mathcal{L}(E)$.

b) La $A_n \in \mathcal{L}(E)$ for $n \geq 1$. Vis at $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ i $\mathcal{L}(E) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ for alle $x \in E$.

c) Hva vil det si at $A \in \mathcal{L}(E)$ er invertibel? Vis at $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$ hvis $A \in \mathcal{L}(E)$ er invertibel.

d) La E være et Banachrom. Hvordan er spekteret til $A \in \mathcal{L}(E)$ definert? Vis at $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$.

Oppgave 3
La $A = [a_{jk}]$ være en kompleks $n \times n$-matrise, og la $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være lineæroperatoren gitt ved $Tx = Ax$ der $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

a) Vis at $\|T\| = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|)$ når $\mathbb{C}^n$ har normen gitt ved $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

b) La $b \in \mathbb{C}^n$. Begrunn at ligningssystemet $(I - A)x = b$ kan løses ved iterasjon hvis matrisen A er slik at $\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ for $j = 1, 2, \cdots, n$.

Oppgave 4
La $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ være en kontinuerlig funksjon som oppfyller $k(t,s)k(s,u) = k(t,u)$ for alle $s, t, u \in [0,1]$. La $\alpha = \max_{0\leq s,t\leq 1} |k(t,s)|$.

La $C[0,1]$ ha maksimumsnormen $\| \cdot \|_\infty$ og la $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være integraloperatoren gitt ved
$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds, \ 0 \leq t \leq 1.$$

a) Vis at $\|K\| = 2\ln 2$ hvis $k(t,s) = \frac{1+t}{1+s}$.

b) Vis ved induksjon at
$$(K^n x)(t) = \int_0^t k(t,s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}x(s)ds$$
for $n \geq 1$.

c) Vis at $\|K^n\| \leq \dfrac{\alpha}{n!}$ og forklar hvorfor rekka $\sum_{n=0}^{\infty} K^n x$ konvergerer for alle $x \in C[0,1]$. Finn summen av rekka når $x(t) = k(t,0), \ 0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 5
La H være et uendeligdimensjonalt Hilbertrom og la $A : H \to H$ være en kompakt operator. Vis at $0 \in \sigma(A)$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Idar Hansen 73 59 35 28

EKSAMEN I FAG 75033 LINEÆR ANALYSE

Mandag 17. august 1998
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Kalkulator ikke tillatt.
- Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1
Bestem $a, b \in \mathbb{C}$ slik at $\displaystyle\int_0^{2\pi} |x(t) - a\cos t - b\sin t|^2 \, dt$ blir minimal når x er gitt ved
$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & \alpha < t \leq 2\pi, \end{cases}$$
der $\alpha \in [0, 2\pi]$ er en konstant.

Oppgave 2

a) Forklar hva som menes med et indreproduktrom. Hvordan er den avledete normen definert? Er normen gitt ved $\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \ (x = (x_1, \ldots, x_n)^T)$ på $\mathbb{C}^n$ avledet av et indreprodukt?

b) La V være et indreproduktrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og avledet norm $\| \cdot \|$. Vis at hvis $x, y \in V$ oppfyller $2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$, da er $x = y$.

Oppgave 3
La $A = [a_{jk}]$ være en kompleks $n \times n$-matrise, og la $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være lineæroperatoren gitt ved $Tx = Ax$ der $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

a) Vis at $\|T\| = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|)$ når $\mathbb{C}^n$ har normen gitt ved $\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$.

b) La $b \in \mathbb{C}^n$. Begrunn at ligningssystemet $(I + A)x = b$ har en entydig løsning x^* hvis A er slik at $\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| < 1$ for $j = 1, 2, \ldots, n$.

Oppgave 4
La $C[0,1]$ ha maksimumsnormen $\| \cdot \|_\infty$ og la $K : C[0,1] \to C[0,1]$ være integraloperatoren gitt ved
$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)\,ds, \ 0 \leq t \leq 1,$$
der $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ er kontinuerlig.

a) Vis at K er begrenset. Finn $\|K\|$ når $k(t,s) = t - s$.

b) Vis ved induksjon at for $n \geq 1$ er
$$(K^n x)(t) = \int_0^t k_n(t,s)x(s)\,ds$$
der $k_1(t,s) = k(t,s)$ og $k_{n+1}(t,s) = \displaystyle\int_s^t k(t,\tau)k_n(\tau,s)\,d\tau$.

c) La $n \geq 1$. Vis at $k_n(t,s) = \dfrac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ når $k(t,s) = t - s$, og at da er $\|K^n\| = \dfrac{1}{(2n)!}$.

[Hint: Vis formelen for $k_n(t,s)$ ved induksjon. Bruk delvis integrasjon med $u = t - \tau$ og $v' = k_n(\tau, s)$ i formelen for k_{n+1} i b).]

d) La $k(t,s) = t - s$. Forklar hvorfor rekka $\sum_{n=0}^{\infty} K^n x$ konvergerer for alle $x \in C[0,1]$. Finn summen av rekka når $x(t) = 1$ for alle $t \in [0,1]$.

Oppgave 5
La H være et Hilbertrom ($H \neq \{0\}$) og la $A : H \to H$ være en kompakt, Hermitisk operator. Vis at $\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$ der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ er egenverdiene til A.