Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

75033 LINEÆR ANALYSE

EKSAMENSOPPGAVER 1992 – 1996
LØSNINGSFORSLAG

Juni 1992

Oppgave 1

a) Vi har
1) $\|x\| \geq 0$ for alle x, og $\|x\| = \sup_k |\xi_k| = 0 \Rightarrow \forall k\, \xi_k = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = \sup_k |\lambda \xi_k| = |\lambda| \sup_k |\xi_k| = |\lambda|\, \|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{C})$.
3) $\|x+y\| = \sup_k |\xi_k + \zeta_k| \leq \sup_k (|\xi_k| + |\zeta_k|) \leq \sup_k |\xi_k| + \sup_k |\zeta_k| = \|x\| + \|y\|$.

Dette viser at $\|\cdot\|$ er en norm på l^∞. Den avledete metrikken er gitt ved $d(x,y) = \|x-y\|$.

b) Et metrisk rom er **komplett** dersom enhver Cauchy-følge fra rommet er konvergent (dvs. har en grense i rommet).

Bevis for at l^∞ er komplett:
La $(x^{(n)})_n$ være en Cauchy-følge i l^∞. For hver $k \geq 1$ er da $|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|$ og $(\xi_k^{(n)})_n$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{C}$ (som er komplett). Så la $\xi_k = \lim_n \xi_k^{(n)}$ for $k \geq 1$.
Vi viser at $x = (\xi_k)_k \in l^\infty$ og at $\lim_n x^{(n)} = x$: La $\varepsilon > 0$ være gitt. Velg N slik at $m, n \geq N$ gir $\|x^{(m)} - x^{(n)}\| < \varepsilon$. For hver $k \geq 1$ er da $|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}| < \varepsilon$ når $m, n \geq N$. Lar vi $m \to \infty$, får vi at $|\xi_k - \xi_k^{(n)}| \leq \varepsilon$ når $n \geq N$ og vi ser at $x - x^{(n)} \in l^\infty$ når $n \geq N$. Da er $x = (x - x^{(N)}) + x^{(N)} \in l^\infty$. Videre får vi at $\|x - x^{(n)}\| \leq \varepsilon$ når $n \geq N$ slik at $\lim_n x_n = x$. Dette viser at l^∞ er komplett.

c) $\|\cdot\|$ er ikke avledet av et indreprodukt siden parallellogramloven $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ikke holder for f.eks. $x = e_1 = (1,0,0,\dots)$ og $y = e_2 = (0,1,0,\dots)$.

Oppgave 2

a) En funksjon $f : X \to X$ er en **kontraksjon** av det metriske rommet (X,d) hvis det fins en $\alpha < 1$ slik at $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$ for alle $x, y \in X$.

Banachs fikspunktteorem: En kontraksjon av et komplett metrisk rom $\neq \emptyset$ har et entydig fikspunkt som kan finnes ved iterasjon fra et vilkårlig punkt.

b) Vi bruker Cauchy-Schwarz over $(0,t)$ og får

$$|(Vx)(t)|^2 \le \Big(\int_0^t |x(s)|ds\Big)^2 \le \Big(\int_0^t 1^2 ds\Big)\Big(\int_0^t |x(s)|^2 ds\Big) \le t\,\|x\|_2^2,$$

slik at $\|Vx\|_2^2 = \int_0^1 |(Vx)(t)|^2 dt \le \int_0^1 t\,\|x\|_2^2 dt = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$ og $\|V\| \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

c) Ligningen er $x = 1 + Vx$, så la $f : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ være gitt ved $f(x) = 1 + Vx$. Da er $\|f(x) - f(y)\|_2 = \|V(x-y)\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|x-y\|_2$ og f er en kontraksjon. Banachs fikspunkttteorem gir at det fins entydig løsning $x \in L^2(0,1)$ og siden x skal være kontinuerlig, er x entydig i $C[0,1]$. Fra $x_0(t) = 0$ fås $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1+t, \ldots, x_n(t) = 1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}$. La $x(t) = e^t$. Da vil $x_n \to x$ i $\|\cdot\|_\infty$-normen og derfor i $\|\cdot\|_2$-normen. Løsningen er derfor gitt ved $x(t) = e^t$.

Oppgave 3

La $p_0 = 1$ og $p_1(x) = x$. Da er $\|p_0\| = 1$, så la $e_0 = p_0$ og $\tilde{e}_1 = p_1 - \langle p_1, e_0\rangle e_0 = p_1 - \frac{1}{2}e_0$. Da er $\|\tilde{e}_1\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ og vi lar $e_1 = \tilde{e}_1/\|\tilde{e}_1\|$, dvs. $e_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$. Med $p(x) = x^3$ er da $\langle p, e_0\rangle = \frac{1}{4}$ og $\langle p, e_1\rangle = 3\sqrt{3}/20$ slik at $a + bx = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\sqrt{3}(2x-1) = -\frac{1}{5} + \frac{9}{10}x$, dvs. $a = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{9}{10}$.

Oppgave 4

Vi har $Dx = \lambda x$ hvis og bare hvis $\frac{x_n}{n} = \lambda x_n$ for alle $n \ge 1$. Altså er egenverdiene $\lambda_n = \frac{1}{n}$ med tilhørende egenvektorer e_n, $n \ge 1$. Siden egenverdiene tilhører spekteret og spekteret er lukket, er $\overline{\left\{\frac{1}{n} | n \ge 1\right\}} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} | n \ge 1\right\} \subseteq \sigma(D)$. For $\lambda \notin \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} | n \ge 1\right\}$ har $\lambda I - D$ en invers gitt ved $(\lambda I - D)^{-1}x = y$ der $y_n = x_n/(\lambda - \frac{1}{n})$: Siden $\lambda \notin \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} | n \ge 1\right\}$, fins $\delta > 0$ slik at $|\lambda - \frac{1}{n}| \ge \delta$ for alle $n \ge 1$, da er $\sum |y_n|^2 \le \|x\|^2/\delta^2$ slik at $(y_n) \in l^2$ og $\|(\lambda I - D)^{-1}\| \le 1/\delta$. Spekteret er da $\sigma(D) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} | n \ge 1\right\}$.

Oppgave 5

La $F \in H^*$ være gitt ved $F(y) = \langle y, x\rangle$ der x er som i oppgaven. Da er

$$\begin{aligned}
\|x - x_n\|^2 &= \langle x - x_n, x - x_n\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \overline{\langle x_n, x\rangle} + \|x_n\|^2 \\
&= \|x\|^2 - F(x_n) - \overline{F(x_n)} + \|x_n\|^2 \\
&\longrightarrow \|x\|^2 - F(x) - \overline{F(x)} + \|x\|^2 = 0
\end{aligned}$$

(siden $F(x) = \langle x, x\rangle$ er reell), dvs. $x_n \to x$.

August 1992

Oppgave 1

a) Vi har
1) $\|f\| \geq 0$ for alle f, og $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx = 0 \Rightarrow f = 0$ siden f er kontinuerlig.
2) $\|\lambda f\| = \int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx = |\lambda| \, \|f\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
3) $\|f+g\| = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx = \|f\| + \|g\|$.
Dette viser at $\|\cdot\|$ er en norm.

b) Et normert rom er **komplett** dersom enhver Cauchy-følge fra rommet er konvergent (med grense i rommet).

La f_n, $n \geq 1$, være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ nx - \frac{n}{2} & \text{hvis } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{hvis } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Da er følgen (f_n) en Cauchy-følge siden

$$\|f_m - f_n\| = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|dx \leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

for $n, m \geq 1$. Anta $\lim f_n = f$ mhp. $\|\cdot\|$. Da har vi

$$\int_0^{1/2} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1|dx \leq \|f - f_n\| \to 0$$

når $n \to \infty$, som gir $f(x) = 0$ for $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ og $f(x) = 1$ for $1/2 \leq x \leq 1$. Dette strider mot at f er kontinuerlig og (f_n) er ikke konvergent mhp. $\|\cdot\|$.
Dette viser at rommet ikke er komplett.

c) La $f(x) = 1 - 2x$ for $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ og 0 ellers, og la $g(x) = 2x - 1$ for $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ og 0 ellers. Da er $\|f \pm g\| = 2\|f\| = 2\|g\| = \alpha \left(= \frac{1}{2}\right)$ slik at $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\alpha^2$ og $2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = \alpha^2$. Dette viser at parallellogramloven ikke holder. Altså kan $\|\cdot\|$ ikke avledes fra et indreprodukt.

Oppgave 2

a) Her er $d(x,y) = \|x-y\|$. Se så oppgave 2a) fra juni 1992.

b) La $A = [a_{ij}]$. Med $\|x\| = \max_{1\leq i\leq 4} |x_i|$ er da $\|Tx\| = \max_i |\sum_j a_{ij}x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|\,|x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|\,\|x\| = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}\right\}\|x\| = \frac{5}{6}\|x\|$, slik at $\|T\| \leq \frac{5}{6} < 1$.

c) Ligningssystemet er $x = Tx + b$ der $b = (-3, 2, -3, -2)^T \in \mathbb{R}^4$, og funksjonen gitt ved $f(x) = Tx + b$ er en kontraksjon av $\mathbb{R}^4$ (som er komplett i enhver norm) siden $\|T\| < 1$. Da gir Banachs fiksjonspunktteorem at ligningen kan løses ved iterasjon fra et vilkårlig punkt x_0, spesielt fra $x_0 = 0$.

Oppgave 3

a) $a \perp b$ dvs. $\langle a, b\rangle = 0$ gir $\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \|a\|^2 + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

b) La $U = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. For å vise at $x - y_0 \perp U$ er det nok å vise at $x - y_0 \perp e_k$ for $1 \leq k \leq n$: $\langle x - y_0, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0$. Siden $y_0 - y \in U$ er $x - y_0 \perp y_0 - y$, og Pytagoras gir at $\|x-y\|^2 = \|x-y_0\|^2 + \|y_0-y\|^2 > \|x-y_0\|^2$ når $y \neq y_0$. Dvs. $\|x - y_0\| < \|x-y\|$ for $y \in U$ og $y \neq y_0$.

c) La $e_1 = 1/\sqrt{2}(1,0,1,0)^T$, $e_2 = 1/\sqrt{2}(0,1,0,1)^T$ og $x = (1,2,3,4)^T$. Da er $y_0 = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 = (2,3,2,3)^T$ den nærmeste vektoren.

Oppgave 4

Spektralteoremet sier at hvis $K : H \to H$ er en kompakt, Hermitisk operator på et Hilbert-rom H, da fins en endelig eller uendelig følge $e_1, e_2, \ldots$ av ortonormale egenvektorer med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ slik at $Kx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ for alle $x \in H$. Hvis $\{\lambda_n\}$ er uendelig, da er $\lim \lambda_n = 0$.

Fra $\lambda_n = \langle Ke_n, e_n\rangle$ følger at $\lambda_n \geq 0$. La $Ax = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\langle x, e_n\rangle e_n$. Vi må vise at dette gir en begrenset operator $A : H \to H$. Nå er $\sum_n |\sqrt{\lambda_n}\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_n \lambda_n |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq M\|x\|^2$ der $M = \max_n |\lambda_n| < \infty$. Dette viser at A er veldefinert og begrenset, og A er Hermitisk siden

$\langle Ax, y\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\,\langle x, e_n\rangle\,\langle e_n, y\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\left\langle x, \overline{\langle e_n, y\rangle} e_n\right\rangle = \left\langle x, \sum_n \sqrt{\lambda_n}\,\langle y, e_n\rangle\, e_n\right\rangle = \langle x, Ay\rangle$.
Det er da klart at $A^2x = Kx$ for alle $x \in H$ slik at $A^2 = K$.

Juni 1993

Oppgave 1

a) Vi har
1)$d(x, y) \geq 0$ for alle x og y, og $d(x, y) = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x = y$.
2)$d(x, y) = d(y, x)$ siden $|x - y| = |y - x|$.
3)For $a, b \geq 0$ er $(a + b)^{1/2} \leq a^{1/2} + b^{1/2}$, så $d(x, y) = |x - y|^{1/2} = |(x - z) + (z - y)|^{1/2} \leq (|x - z| + |z - y|)^{1/2} \leq |x - z|^{1/2} + |z - y|^{1/2} = d(x, z) + d(z, y)$.

Dette viser at d er en metrikk på $\mathbb{R}$.

b) Et **normert rom** $(E, \|\cdot\|)$ er et par der E er et vektorrom over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$ og $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ er en norm, dvs. 1) $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$, 2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ og 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (for alle $x, y \in E$ og λ skalar).

Den **avledete metrikken** er er gitt ved $d(x, y) = \|x - y\|$. Siden $\|x\| = d(x, 0)$ og $d(2x, 0) = \sqrt{2}\sqrt{|x|} \neq 2\sqrt{|x|} = |2| d(x, 0)$, er metrikken i a) ikke avledet av en norm.

c) Et **indreproduktrom** $(E, \langle\,,\rangle)$ er et par der E er et vektorrom over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) og $\langle\,,\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) oppfyller 1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, 2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\,\langle x, y\rangle$, 3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ og 4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$ (for alle $x, y, z \in E$ og λ skalar).

Den **avledete normen** er gitt ved $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Normen $\|\cdot\|_1$ gitt ved $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ på $\mathbb{C}^n$ er for $n \geq 2$ ikke avledet av et indreprodukt siden parallellogramloven $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ikke holder f.eks. for $x = e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ og $y = e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$: $\|x \pm y\|_1 = 2\|x\|_1 = 2\|y\|_1 = 2$ og $\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 8$, mens $2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2) = 4$.

Oppgave 2

For $m > n$ har vi $\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^m x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|$ som går mot 0 når $n \to \infty$ siden $\sum_k \|x_k\|$ er en konvergent rekke. Dermed er $(S_n)_n$ en Cauchy-følge og siden E er komplett, har $(S_n)_n$ en grense $x \in E$. Skrivemåten er da $x = \sum_{k=1}^\infty x_k$ ($= \lim_{n\to\infty} S_n$).

Oppgave 3

a) $F(x) = \int_{-1}^{1} k(t)x(t)dt$ gir $|F(x)| \leq \int_{-1}^{1} |k(t)|\,|x(t)|dt \leq \int_{-1}^{1} |x(t)|dt \leq 2\|x\|_\infty$ (der $\|x\|_\infty = \max_{-1\leq t\leq 1} |x(t)|$). Dette viser at F er begrenset med $\|F\| \leq 2$. La $x_n \in C[-1,1]$ være gitt ved $x_n(t) = nt$ for $-\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}$ og $x_n(t) = t/|t|$ ellers. Da er $\|x_n\|_\infty = 1$ og $F(x_n) = 2 - \frac{1}{n}$. Dette viser at $\|F\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |F(x)| \geq 2$ slik at $\|F\| = 2$.

b) Med x_n som i a) er funksjonen $x = \frac{2}{2-\frac{1}{n}} x_n$ i $A\,(n \geq 1)$, så $A \neq \emptyset$. Hvis $y_n \in A$ og $\lim y_n = y$ i $C[-1,1]$, så gir kontinuitet av F at $F(y) = \lim F(y_n) = 2$, så $y \in A$ og A er lukket i $C[-1,1]$. (Enklere: $A = F^{-1}(\{2\})$ er lukket siden $\{2\} \subseteq \mathbb{R}$ er det og F er kontinuerlig.) Hvis x og y er i A, da er $F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda 2 + (1-\lambda)2 = 2$, og A er konveks. Hvis $x \in A$, da er $2 = F(x) = |F(x)| \leq 2\|x\|_\infty$ ($\|F\| = 2$) slik at $\|x\|_\infty \geq 1$ for alle $x \in A$. Hvis $x \in A$ med $\|x\|_\infty = 1$, da er $\int_{-1}^{1} |x(t)|dt = 2\|x\|_\infty$ og kontinuiteten av x gir at $|x(t)| = \|x\|_\infty = 1$ for alle t. Men da er $x = 1$ eller -1 (kontinuitet) og $F(1) = 0$ gir at $x \notin A$. Motsigelsen viser at det ikke fins noe element i A med minimal norm.

I et Hilbert-rom har alltid en ikke-tom, lukket, konveks mengde et element med minimal norm. (Nærmeste–punkt–egenskapen.)

Oppgave 4

a) En ortonormal følge $(e_n)_n$ i et Hilbert-rom H er **komplett** dersom $x \in H$ med $\langle x, e_n\rangle = 0$ for alle n, medfører at $x = 0$. Da er $x = \sum_n \langle x, e_n\rangle\, e_n$ og $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2$ for alle $x \in H$.

b) For hver $j \geq 1$ er $\sum_i |a_{ij}|^2 = \sum_i |\langle Ae_j, e_i\rangle|^2 = \|Ae_j\|^2 < \infty$. For hver $i \geq 1$ er $\sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_j |\langle Ae_j, e_i\rangle|^2 = \sum_j |\langle e_j, A^*e_i\rangle|^2 = \sum_j |\langle A^*e_i, e_j\rangle|^2 = \|A^*e_i\|^2 < \infty$.

c) La $Ax = \sum_i d_i \langle x, e_i\rangle\, e_i$. Da er A begrenset hvis og bare hvis $(d_i)_i$ er en begrenset følge. Så $d_{ii} = i$ og $d_{ij} = 0$ for $i \neq j$ gir en matrise som ikke er matrisen til en begrenset operator selv om hver søyle og rad er kvadratisk summerbar.

Hvis $\sum_{ij} |a_{ij}|^2 < \infty$, da er for $x \in H$ $\|Ax\|^2 = \sum_i |\sum_j a_{ij}x_j|^2 \leq \sum_i (\sum_j |a_{ij}|\,|x_j|)^2 \leq \sum_i (\sum_j |a_{ij}|^2)\,(\sum_j |x_j|^2) = (\sum_{ij} |a_{ij}|^2)\|x\|^2$ (ved Cauchy-Schwarz), og A er begrenset med $\|A\| \leq (\sum |a_{ij}|^2)^{1/2}$.

Siden $\sum_j \|Ae_j\|^2 = \sum_{ij} |a_{ij}|^2 < \infty$, er A Hilbert-Schmidt og dermed kompakt.

Oppgave 5

Siden $\langle f,g\rangle_W = \langle f,g\rangle + \langle f',g'\rangle$ og $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ gir et indreprodukt på $C[0,1]$, er det klart at $\langle\,,\rangle_W$ er et indreprodukt på $W[0,1]$. La $\langle\,,\rangle_2$ være indreproduktet på $L^2(0,1)$ (samme formel som $\langle\,,\rangle$). Da er $\|\frac{d}{dt}f\|_2^2 = \langle f',f'\rangle_2 \le \langle f,f\rangle_W = \|f\|_W^2$, og $\frac{d}{dt}$ er begrenset med $\|\frac{d}{dt}\| \le 1$.

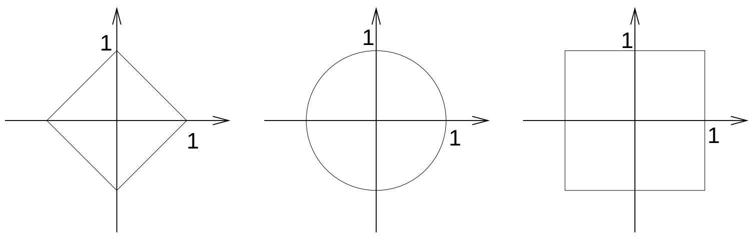
August 1993

Oppgave 1

a) Vi har
   1)$x \ne y \Rightarrow |\xi_i - \eta_i| > 0$ for $i = 1$ eller $2 \Rightarrow d_\infty(x,y) = \max|\xi_i - \eta_i| > 0$.
   2)$d_\infty(x,y) = \max|\xi_i - \eta_i| \le \max(|\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i|) \le \max|\xi_i - \zeta_i| + \max|\zeta_i - \eta_i| = d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$ der $z = (\zeta_1,\zeta_2)$.
   3)$d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$ er klart.

   Dette viser at d_∞ er en metrikk på $\mathbb{R}^2$.

b) Enhetskula, $S(0;1)$, i de tre metrikkene er gitt ved:



$d_1(x,y)$ $d_2(x,y)$ $d_\infty(x,y)$

   At $\lim_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$ følger fra at $a,b \ge 0$ gir $\lim_{p\to\infty}(a^p + b^p)^{1/p} = \max\{a,b\}$, og dette er klart siden $\max\{a,b\} \le (a^p + b^p)^{1/p} \le \max\{a,b\}\,2^{1/p}$.

Oppgave 2

La $(x_n)_n$ være en Cauchy-følge i X. Vi må vise at $(x_n)_n$ er konvergent. La $(x_{n_k})_k$ der $n_k \ge k$ være en konvergent delfølge av $(x_n)_n$ og la $\lim_k x_{n_k} = x \in X$. Viser at da er også $\lim x_n = x$. Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins N, slik at $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n,m \ge N$ (siden $(x_n)_n$ er Cauchy), og N_2 slik at $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ når $k \geq N_2$. La $N = \max\{N_1, N_2\}$. For $k \geq N$ er da $n_k \geq k \geq N_1$ og $k \geq N_2$ slik at $d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dette viser at $\lim x_n = x$, og X komplett.

Oppgave 3

a) $\|Ax\|_\infty = \max_i |\sum_j a_{ij}\xi_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|\,|\xi_j| \leq (\max_i \sum_j |a_{ij}|)\|x\|_\infty = \alpha\|x\|_\infty$, så $\|A\| \leq \alpha$. La i_0 være slik at $\alpha = \sum_j |a_{i_0 j}|$, og la ξ_j være gitt ved $\xi_j a_{i_0 j} = |a_{i_0 j}|$ hvis $a_{i_0 j} \neq 0$ og $\xi_j = 1$ ellers. La $x = (\xi_j)$. Da er $\|x\|_\infty = 1$ og $\|Ax\|_\infty = \alpha$, dvs. $\|A\| \geq \alpha$. Dette viser at $\|A\| = \alpha$.

b) $(*)$ kan skrives $x = Ax + b$, så la $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ være gitt ved $f(x) = Ax + b$. Da er $\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|A(x-y)\|_\infty \leq \alpha\|x - y\|_\infty$, og siden $\alpha < 1$, er f en kontraksjon. Banachs fikspunktteorem gir at f har et entydig fikspunkt som kan finnes ved iterasjon fra et vilkårlig startpunkt. Påstanden i oppgaven følger.

c) For $k > n$ har vi

$$\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq \alpha\|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \leq \cdots \leq \alpha^{k-n}\|x_n - x_{n-1}\|_\infty,$$

så for $m > n$ er

$$\|x_m - x_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{m} \alpha^{k-n}\Big)\|x_n - x_{n-1}\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\|_\infty.$$

Lar vi $m \to \infty$, fås $\|s - x_n\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\|_\infty$ for $n \geq 1$.

Oppgave 4

Anta $Ax = \lambda x$ der $\|x\| = 1$, da er $\lambda = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}$ og λ er reell. Hvis $Ax = \lambda x$ og $Ay = \mu y$ der $\lambda \neq \mu$, da er $\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \bar{\mu}\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$ og $\lambda \neq \mu$ gir $\langle x, y\rangle = 0$, dvs. x og y er ortogonale.

Oppgave 5

a) Fra $(Kx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds = \big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos s\, x(s)ds\big)\cos t - \big(\int_{-\pi}^{\pi} \sin s\, x(s)ds\big)\sin t$ fås at $Kx = -\langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2$ der $e_0 = 1$, $e_{2n}(t) = \cos nt$, $e_{2n-1}(t) = \sin nt$ $(n \geq 1)$ gir en ortogonal basis $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ for $L^2(-\pi, \pi)$. $Ke_1 = -\pi e_1$ gir at e_1 er en egenvektor med egenverdi $-\pi$, og $Ke_2 = \pi e_2$ gir at e_2 er en egenvektor med egenverdi π. For $n \neq 1, 2$ er e_n egenvektorer med egenverdi 0.

b) $Kx = f$ har løsning hvis og bare hvis $f \in \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$. Hvis $f = be_1 + ae_2$, da er løsningsmengden de $x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n e_{2n} + b_n e_{2n-1})$ med $a_1 = \frac{a}{\pi}$ og $b_1 = -\frac{b}{\pi}$.

Juni 1994

Oppgave 1

a) Vi har
$1) x \neq y \Rightarrow \exists k\, |x_k - y_k| > 0 \Rightarrow d_1(x,y) > 0.$
$2) d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{N} \big(|x_k - z_k| + |z_k - y_k|\big) = d_1(x,z) + d_1(z,y).$
$3) d_1(x,y) = d_1(y,x)$ er klart.

Dette viser at d_1 er en metrikk på $\mathbb{R}^N$.

La $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ være en Cauchy-følge i $(\mathbb{R}^N, d_1)$. Vi må vise at $(x^{(n)})_n$ er konvergent. Siden $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leq d_1(x^{(n)}, x^{(m)})$, er $(x_k^{(n)})_n$ en Cauchy-følge i $\mathbb{R}$ for hver k, $1 \leq k \leq N$. Siden $\mathbb{R}$ er komplett, er $(x_k^{(n)})_n$ konvergent, si $x_k = \lim_n x_k^{(n)}$. La $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins N_0 slik at $|x_k - x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{N}$ for $n \geq N_0$ og $1 \leq k \leq N$, og da er $d_1(x, x^{(n)}) < \varepsilon$ for $n \geq N_0$. Dette viser at $\lim_n x^{(n)} = x$, og $(\mathbb{R}^N, d_1)$ er komplett.

b) Hvis (X, d) er et metrisk rom og $Y \subseteq X$, da gir restriksjonen av d til $Y \times Y$ en metrikk på Y. Dette er den **induserte metrikken** (og (Y, d) er et metrisk rom).

Metrikken d på $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ er indusert av d_1 og siden Y, som er endelig, er lukket i $\mathbb{R}^N$, er (Y, d) et komplett metrisk rom siden $(\mathbb{R}^N, d_1)$ er det.

Oppgave 2

a) $\|Ax\| = \sum_{i=1}^{N} |\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_j \big(\sum_i |a_{ij}|\big)|x_j| \leq \alpha \sum_j |x_j| = \alpha\|x\|$, dvs. $\|A\| \leq \alpha$. La j_0 være slik at $\alpha = \sum_i |a_{ij_0}|$. Da er $\|Ae_{j_0}\| = \sum_i |a_{ij_0}| = \alpha$, dvs. $\|A\| \geq \alpha$. Dette gir at $\|A\| = \alpha$.

b) Ligningen kan skrives $x = Ax + b$, så la $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ være gitt ved $f(x) = Ax + b$ der $\mathbb{R}^N$ har normen $\|x\| = \sum |x_k|$. Da er $\|f(x) - f(y)\| = \|A(x-y)\| \leq \alpha\|x - y\|$ og siden $\alpha < 1$, er f en kontraksjon. Banachs fikspunktteorem gir at f har et entydig fikspunkt og ligningen dermed en entydig løsning.

c) $|f(x) - f(y)| = \left|(x-y) + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|(x-y) - \frac{(x-y)}{xy}\right| = \left|1 - \frac{1}{xy}\right| |x - y|$, og siden $\left|1 - \frac{1}{xy}\right| \to 1$ når $x, y \to \infty$, er f ingen kontraksjon.

Funksjonen $g : (0,1] \to (0,1]$ gitt ved $g(x) = \frac{x}{2}$ er en kontraksjon, men har ikke noe fikspunkt siden $0 \notin (0,1]$. $(0,1]$ er ikke komplett.

Oppgave 3

a) Siden k er kontinuerlig på $[0,1]\times[0,1]$, er K kompakt og siden $k(t,s)=\overline{k(s,t)}$, er K Hermitisk. Hilbert-rommet $L^2(0,1)$ er separabelt og spektralteoremet sier at det fins en ONB $(e_n)_n$ av egenvektorer for K med tilhørende egenverdier λ_n slik at $Kx=\sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ for alle $x\in L^2(0,1)$. Videre er $\lim \lambda_n = 0$ hvis $\{\lambda_n\}_n$ er uendelig.

La $\varphi_n(t)=\sin(n\pi t)$, da er $(K\varphi_n)(t)=\int_0^1 k(t,s)\sin(n\pi s)ds=\int_0^t(1-t)s\sin(n\pi s)ds+\int_t^1(1-s)t\sin(n\pi s)ds=\cdots=\frac{1}{(n\pi)^2}\varphi_n(t)$, dvs. φ_n er egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda_n=\frac{1}{(n\pi)^2}$, $n\geq 1$. La $e_n(t)=\sqrt{2}\sin(n\pi t)$, da er $(e_n)_{n=1}^\infty$ en ONB i $L^2(0,1)$, og $Ke_n=\lambda_n e_n$. Hvis $\varphi=\sum\langle\varphi,e_n\rangle e_n$ med $K\varphi=\lambda\varphi$, da er $K\varphi=\sum\lambda_n\langle\varphi,e_n\rangle e_n=\sum\lambda\langle\varphi,e_n\rangle e_n$ og $(\lambda-\lambda_n)\langle\varphi,e_n\rangle=0$ for alle $n\geq 1$. Hvis $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_2,\dots\}$, da er $\langle\varphi,e_n\rangle=0$ for $n\geq 1$ og $\varphi=0$. Så hvis λ er egenverdi, da er $\lambda=\lambda_{n_0}$ si, og bare $\langle\varphi,e_{n_0}\rangle\neq 0$ siden λ_n-ene er forskjellige. Dvs. $\varphi=\langle\varphi,e_{n_0}\rangle e_{n_0}$ og vi får ingen andre egenvektorer enn αe_n, $n\geq 1$, $\alpha\neq 0$.

b) La $f=\sum_n\beta_n e_n\in L^2(0,1)$ være gitt, og la x være $x=\sum_n\alpha_n e_n$. Da er $Kx-\lambda x=f$ hvis og bare hvis $\alpha_n(\lambda_n-\lambda)=\beta_n$ for $n\geq 1$. For $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_2,\dots\}\cup\{0\}$ fins $\delta>0$ slik at $|\lambda_n-\lambda|\geq\delta$ for alle $n\geq 1$ (siden $\lambda_n\to 0$, må $\lambda\neq 0$ her), og vi har løsningen $x=\sum_n\big(\frac{\beta_n}{\lambda_n-\lambda}\big)e_n$ siden $\sum_n\left|\frac{\beta_n}{\lambda_n-\lambda}\right|^2\leq\frac{1}{\delta^2}\|f\|^2<\infty$.

Hvis $\lambda=\lambda_{n_0}$, da har vi løsning hvis og bare hvis $\beta_{n_0}=0$, og denne er da $x=\sum_{n\neq n_0}\big(\frac{\beta_n}{\lambda_n-\lambda}\big)e_n+\alpha e_{n_0}$ der $\alpha\in\mathbb{C}$ er vilkårlig.

Hvis $\lambda=0$, da har vi løsning hvis og bare hvis $f\in\operatorname{im}K$ (dvs. $\sum_n\left|\frac{\beta_n}{\lambda_n}\right|^2<\infty$), og denne er da $x=\sum_n\big(\frac{\beta_n}{\lambda_n}\big)e_n$.

Oppgave 4

a) Linearitet av A og polariseringsidentiteten gir $\langle Ax,Ay\rangle=\frac14\sum_{n=0}^3 i^n\|A(x+i^ny)\|^2=\frac14\sum_{n=0}^3 i^n\|x+i^ny\|^2=\langle x,y\rangle$ siden $\|Ax\|=\|x\|$ for alle x.

b) $\langle A^*Ax,y\rangle=\langle Ax,Ay\rangle\overset{a)}{=}\langle x,y\rangle$ for alle $x,y\in H$. For fast x er da $\langle A^*Ax-x,y\rangle=0$ for alle y, spesielt for $y=A^*Ax-x$, og vi får $A^*Ax=x$ for alle x. Dvs. $A^*A=I$.

P er projeksjonen på M hvis $\operatorname{im}P=M$ og $x-Px\perp M$ for alle x. Her er $M=\operatorname{im}AA^*$, og for alle $x,y\in H$ er $\langle x-AA^*x,AA^*y\rangle=\langle x,AA^*y\rangle-\langle A(A^*x),A(A^*y)\rangle=\langle A^*x,A^*y\rangle-\langle A^*x,A^*y\rangle=0$, som viser at $x-AA^*x\perp M$ for alle x.

August 1994

Oppgave 1

Vi har

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\ &\quad + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2+\|y\|^2),\end{aligned}$$

og (*) følger. Videre

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 &= 2(\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}) = 4\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle\,, \\ \|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2 &= 4\,\mathrm{Re}\,\langle x,iy\rangle = 4\,\mathrm{Im}\,\langle x,y\rangle\,,\end{aligned}$$

og (**) følger.

Oppgave 2

La $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$. Da er for $m>n$, $\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2$ og $\|S_m-S_n\| \to 0$ når $n\to\infty$ siden $\sum_k |\alpha_k|^2$ er konvergent. Men da er $(S_n)_n$ en Cauchy-følge og dermed konvergent siden H er komplett, og (S_n) har en grense $x\in H$, dvs. $x=\sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k (=\lim_n S_n)$.

Oppgave 3

Vektorene e_0, e_1 danner et ortonormalt system i $L^2(0,1)$ siden $\|e_0\|_2 = \|e_1\|_2 = 1$ og $\langle e_0, e_1\rangle = 0$. La $p_2(t)=t^2$. Da er $f=\alpha e_0 + \beta e_1$, der $\alpha = \langle p_2, e_0\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ og $\beta = \langle p_2, e_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6}$, dvs. $f(t) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2t-1) = t - \frac{1}{6}$.

Oppgave 4

a) Vi har $|(Kx)(t)| \le \int_0^t s|\ln\frac{s}{t}||x(s)|ds \le \left(\int_0^t s\ln\frac{t}{s}ds\right)\|x\| = \cdots\cdots = \frac{t^2}{4}\|x\| \le \frac{1}{4}\|x\|$, så $\|K\| \le \frac{1}{4} < 1$.

b) $\|K\|<1$ gir at $x=(I-K)^{-1}(1) = \sum_{n=0}^\infty K^n(1)$. Men med $p_n(t)=t^n$ $(n\ge 0)$ er $K(p_n) = -\frac{p_{n+2}}{(n+2)^2}$ og det gir at $K^n(1) = (-1)^n \frac{p_{2n}}{2^2\cdot 4^2 \cdots (2n)^2}$ slik at x er gitt ved $x(t) = 1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}$.

Oppgave 5

a,b) Gitt $\lambda \in \mathbb{D} = \{z \,|\, |z| < 1\}$. Da er $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l^2$ siden $\sum |\lambda|^{2n} < \infty$, $x \neq 0$ og $Vx = \lambda x$ viser at λ er en egenverdi. Hvis $|\lambda| \geq 1$, da er λ klart ikke egenverdi. Vi får da $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \sigma(V)$, men $\|Vx\|^2 = \|x\|^2 - |x_1|^2$ viser at $\|V\| = 1$ og $\sigma(V) \subseteq \{z \,|\, |z| \leq 1\} = \overline{\mathbb{D}}$. Dette viser at egenverdiene er $\mathbb{D}$ og at $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$.

Oppgave 6

a) Siden $x = Px + (x - Px)$ og $Px \perp x - Px$, er $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geq \|Px\|^2$ og $\|P\| \leq 1$. $P^2 = P$ er opplagt fra entydigheten. Videre er $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + (y - Py)\rangle = \langle Px, Py\rangle + \langle Px, y - Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$. På samme måte er $\langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$ og $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ for alle $x, y \in H$, dvs. $P^* = P$.

b) For alle x, y er $\langle x - Tx, Ty\rangle = \langle x, Ty\rangle - \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, Ty\rangle - \langle x, T^*Ty\rangle = 0$ siden $T^*T = T^2 = T$, og vi får at $x - Tx \in M^\perp$ for alle $x \in H$. T er da den ortogonale projeksjonen på M hvis M er lukket. Men $Tx_n \to x$ i H gir $T^2x_n \to Tx$ (siden $T \in \mathcal{L}(H)$), dvs. $Tx_n \to Tx$ og $x = Tx \in M$. Altså er M lukket.

Mai 1995

Oppgave 1

Med $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$ er $d^2 = \int_{-1}^{1} |1 - ax - bx^2|^2 dx = \|1 - (ap_1 + bp_2)\|^2$ der $p_n(t) = t^n$, dvs. d^2 er minimal når $ap_1 + bp_2 =$ projeksjonen av 1 på $U = \operatorname{span}\{p_1, p_2\}$. La $e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}p_1$ og $e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}p_2$, da er $\operatorname{proj}_U 1 = \langle 1, e_1\rangle\, e_1 + \langle 1, e_2\rangle\, e_2 = \frac{5}{3}p_2$, dvs. $a = 0$ og $b = \frac{5}{3}$.

Oppgave 2

a) Vi viser først at F_c er veldefinert, dvs. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergerer når $x = (x_n)_n \in l^\infty$:

$$(*) \quad |F_c(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\,|x_n| \leq \|c\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|c\|_\infty \|x\|_1 < \infty.$$

Det er klart at F_c er lineær, og $(*)$ viser også at $\|F_c\| \le \|c\|_\infty$. Videre er $|F_c(e_n)| = |c_n|$ så $\|F_c\| = \sup_{\|x\|\le 1} |F_c(x)| \ge \sup_n |F_c(e_n)| = \sup_n |c_n| = \|c\|_\infty$. Dette viser at $\|F\| = \|c\|_\infty$.

b) La $g \in (l^1)^*$, dvs. $g : l^1 \to \mathbb{C}$ er en begrenset funksjonal. Sett $c_n = g(e_n) \in \mathbb{C}$. Da er $c = (c_n) \in l^\infty$ siden $|c_n| = |g(e_n)| \le \|g\|$ for alle $n \ge 1$. Da har vi $F_c \in (l^1)^*$ som i a). For alle $x \in l^1$, er $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, så

$$\begin{aligned} g(x) &= g\big(\textstyle\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\big) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^\infty x_n g(e_n) \quad && \text{, } g \text{ begrenset dvs. kontinuerlig} \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^\infty c_n x_n \\ &= F_c(x), \end{aligned}$$

dvs. $g = F_c$.

Oppgave 3

a) La $F : H \to H$ være gitt ved $F(x) = Ax + f$. Ligningen er da $x = F(x)$, og F er en kontraksjon: $d(F(x), F(y)) = \|F(x) - F(y)\| = \|Ax - Ay\| \le \|A\|\,\|x - y\| = \alpha d(x, y)$, der $\alpha = \|A\| < 1$. Banachs fikspunktteorem gir at (H er komplett) F har et entydig fikspunkt $x \in H$, dvs. $x = F(x) = f + Ax$. Fikspunktet oppnås ved iterasjon fra en vilkårlig $x_0 \in H$: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ der $x_{n+1} = F(x_n)$, $n \ge 0$.
Velg $x_0 = 0$. Da er

$$\begin{aligned} x_1 &= f \\ x_2 &= f + Af \\ x_3 &= f + Af + A^2 f \\ &\vdots \\ x_n &= f + Af + A^2 f + \cdots + A^{n-1} f, \end{aligned}$$

og $x = \lim_{n\to\infty} \big(\sum_{k=0}^{n-1} A^k f\big) = \sum_{n=0}^\infty A^n f$.
(Alternativt: $x = f + Ax \Rightarrow x = (I - A)^{-1} f = \sum_{n=0}^\infty A^n f$, siden $\|A\| < 1$.)

b) $A \in \mathcal{L}(H)$ er **invertibel** hvis det fins $B \in \mathcal{L}(H)$ slik at $AB = BA = I$.

At $x = f + Ax$ har entydig løsning x for alle $f \in H$ betyr at $(I - A)^{-1}$ fins som lineær avbildning. Vi må vise at den er begrenset. Hvis $(I - A)^{-1} f = x$, da er

$$\|(I - A)^{-1} f\| = \|x\| \overset{a)}{=} \|\sum_{n=0}^\infty A^n f\| \le \sum_{n=0}^\infty \|A\|^n \|f\| = \frac{1}{1 - \|A\|}\|f\|,$$

som gir $\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|} < \infty$. Dette viser at $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ og også ulikheten.

Oppgave 4

a) La $U = \operatorname{span}\{g, h\}$. Da er $\dim U = 0, 1$ eller 2.
0) $\dim U = 0$. Da er $g = h = 0, \operatorname{im} K = \{0\}$ og $\ker K = H$.
1) $\dim U = 1$. Da er $g = \alpha h\,(h \neq 0)$ eller $h = \alpha g\,(g \neq 0)$ der $\alpha \in \mathbb{C}$. Anta $g = \alpha h,\ h \neq 0$. Da er $Kx = \langle x, h\rangle\,(\alpha + \bar{\alpha})h$ og vi får

i) Hvis $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, da er $\operatorname{im} K = \{0\}$ og $\ker K = H$.

ii) Hvis $\alpha + \bar{\alpha} \neq 0$, da er $\operatorname{im} K = \operatorname{span}\{h\}$ og fra $Kx = 0$ hvis og bare hvis $\langle x, h\rangle = 0$ fås at $\ker K = \{h\}^{\perp}$.

2) $\dim U = 2$. Da er g og h lineært uavhengige og $\operatorname{im} K = \operatorname{span}\{g, h\}$. Fra $Kx = 0$ hvis og bare hvis $\langle x, g\rangle = \langle x, h\rangle = 0$ fås at $\ker K = \{g, h\}^{\perp}$.
Konklusjon
Hvis $g = \alpha h$ eller $h = \alpha g$ der $\alpha \in i\mathbb{R}$, da er $\ker K = H$ og $\operatorname{im} K = \{0\}$, ellers er $\ker K = \{g, h\}^{\perp}$ og $\operatorname{im} K = \operatorname{span}\{g, h\}$.

Fra $\|Kx\| \leq |\langle x, h\rangle|\,\|g\| + |\langle x, g\rangle|\,\|h\| \leq \|x\|\,\|h\|\,\|g\| + \|x\|\,\|g\|\,\|h\| \leq 2\|g\|\,\|h\|\,\|x\|$, følger at $\|K\| \leq 2\|g\|\,\|h\|$ og K er begrenset. Siden K også har endelig rang, er K kompakt.

K er Hermitisk siden $\langle Kx, y\rangle = \langle \langle x, h\rangle g + \langle x, g\rangle h, y\rangle = \langle x, h\rangle \langle g, y\rangle + \langle x, g\rangle \langle h, y\rangle = \left\langle x, \overline{\langle g, y\rangle} h + \overline{\langle h, y\rangle} g \right\rangle = \langle x, \langle y, g\rangle h + \langle y, h\rangle g\rangle = \langle x, Ky\rangle$.

b) Hvis $g = 0$ eller $h = 0$, da holder ulikheten, så anta begge $\neq 0$. Da er $\{\frac{g}{\|g\|}, \frac{h}{\|h\|}\}$ et ortonormalt system, så Bessels ulikhet gir $\frac{|\langle x, g\rangle|^2\|g\|^2}{\|g\|^4} + \frac{|\langle x, h\rangle|^2\|h\|^2}{\|h\|^4} \leq \|x\|^2$, dvs. $|\langle x, g\rangle|^2\|h\|^2 + |\langle x, h\rangle|^2\|g\|^2 \leq \|x\|^2\|g\|^2\|h\|^2$.

Videre gir Pytagoras og Cauchy-Schwarz at $\|Kx\|^2 = |\langle x, h\rangle|^2\|g\|^2 + |\langle x, g\rangle|^2\|h\|^2 \leq \|g\|^2\|h\|^2\|x\|^2$, som viser at $\|K\| \leq \|g\|\,\|h\|$. Men $x = \dfrac{g}{\|g\|}$ gir $\|Kx\| = \frac{\langle g, g\rangle}{\|g\|}\|h\| = \|g\|\,\|h\|$, så $\|K\| = \|g\|\,\|h\|$.

c) Vi får

$$\begin{array}{rcl} x = g & + & \langle x,h\rangle g + \langle x,g\rangle h \\ & \Downarrow & \\ \langle x,g\rangle & = & \|g\|^2 + \langle x,h\rangle \|g\|^2 \\ \langle x,h\rangle & = & \langle x,g\rangle \|h\|^2 \\ & \Downarrow & \\ (*) \quad \langle x,g\rangle & = & \|g\|^2 + \langle x,g\rangle \|g\|^2\|h\|^2 \\ & \Downarrow & \text{hvis } \|g\|\,\|h\| \neq 1 \\ \langle x,g\rangle & = & \frac{\|g\|^2}{1-\|g\|^2\|h\|^2}, \text{ og da er} \\ \langle x,h\rangle & = & \frac{\|g\|^2\|h\|^2}{1-\|g\|^2\|h\|^2}, \text{ så} \\ x & = & \frac{1}{1-\|g\|^2\|h\|^2}(g+\|g\|^2 h). \end{array}$$

Dette viser at $\|g\|\,\|h\| \neq 1$ gir entydig løsning som over.

Hvis vi har løsning, da holder $(*)$ over, og $\|g\|\,\|h\| = 1$ gir motsigelsen $\|g\| = 0$. Altså må $\|g\|\,\|h\| \neq 1$.

d) Vi ser at med $g(t) = t$ og $h(t) = 1$ er $(Mx)(t) = \langle x,h\rangle t + \langle x,g\rangle 1$, så $Mx = \langle x,h\rangle g + \langle x,g\rangle h$. Ligningen $x(t) = t + (Mx)(t)$ er da $x = g + \langle x,h\rangle g + \langle x,g\rangle h$ som over, og siden $\langle g,h\rangle = \int_{-1}^{1} s\,ds = 0$ og $\|g\|^2\|h\|^2 = \left(\int_{-1}^{1} s^2 ds\right)\left(\int_{-1}^{1} ds\right) = \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3} \neq 1$, så gir c) at vi har entydig løsning $x = \frac{1}{1-\frac{4}{3}}(g + \frac{2}{3}h) = -3g - 2h$, dvs. $x(t) = -3t - 2$.

August 1995

Oppgave 1

La $w = u - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v = u + \dfrac{i}{2} v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ i \\ i/2 \end{pmatrix}$, da er $w \perp v$ slik at $x = \operatorname{proj} a = \frac{\langle a,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v + \frac{\langle a,w\rangle}{\langle w,w\rangle} w = \frac{-3i}{2} v + \frac{3/2}{3/2} w = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$.

Oppgave 2

a) La $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots) \in l^2$. Da er $\langle e_n, S^* x\rangle = \langle S e_n, x\rangle = \langle e_{n+1}, x\rangle = x_{n+1}$ og $\langle e_n, Tx\rangle = (Tx)_n = x_{n+1}$, så $S^* = T$.

Videre er $\mathcal{N}(T) = \text{span}\{e_1\} = \mathcal{R}(S)^\perp$. Vi ser at $ST = I - P_1$ der $P_1 x = \langle x, e_1 \rangle e_1$ og $TS = I$.
T er ikke invertibel siden T ikke er 1–1, og S er ikke invertibel siden S ikke er på.

b) Hvis $x \in \mathcal{N}(A)$, da er $\langle x, A^* y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$ for alle $y \in H$, og $x \in \mathcal{R}(A^*)^\perp$. Hvis $x \in \mathcal{R}(A^*)^\perp$, da er $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = 0$ for alle $y \in H$, og $Ax = 0$, dvs. $x \in \mathcal{N}(A)$. Dette viser at $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$.

c)

(1) er gal:	$A = T$ og $B = S$ fra a) oppfyller $AB = I$ som er invertibel, men verken A eller B er invertible.
(2) er gal:	$TS = I$ er invertibel mens ST ikke er det.
(3) er sann:	Hvis AB og BA er invertible, så gir $(BA)B = B(AB)$ at $B(AB)^{-1} = (BA)^{-1}B$ som klart er invers til A [den er begrenset]. Tilsvarende for B.

Oppgave 3

En lineær operator $A : E \to E$ er **kompakt** hvis for enhver begrenset følge $(x_n)_n$, $(Ax_n)_n$ har en konvergent delfølge.
La $(x_n)_n$ være begrenset:

1) B kompakt gir at (Bx_n) har en konvergent delfølge (Bx_{n_k}). Men da konvergerer også (ABx_{n_k}) siden A er kontinuerlig. Altså er AB kompakt.

2) A begrenset gir at (Ax_n) er en begrenset følge og (BAx_n) har konvergent delfølge siden B er kompakt. Altså er BA kompakt.

Oppgave 4

a) **Banachs fikspunktteorem**: Hvis (X, d), $X \neq \emptyset$, er et komplett metrisk rom og $f : (X, d) \to (X, d)$ er en kontraksjon – dvs. det fins $\alpha < 1$ slik at $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ for alle $x, y \in X$ – da har f et entydig fikspunkt $x^* \in X$.

Siden T^N er en kontraksjon, har T^N et entydig fikspunkt x^*, dvs. $T^N x^* = x^*$. Men da er $T^N(Tx^*) = T(T^N x^*) = Tx^*$ og entydigheten gir $Tx^* = x^*$. At x^* er T's eneste fikspunkt er klart siden $Tx = x$ gir at $T^N x = x$.

b) Fra $|(Vx)(t)| \leq \int_0^t |x(s)| ds \leq t \, \|x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ fås at $\|Vx\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ og dermed er $\|V\|_\infty \leq 1$. Med $x(t) = 1$ for alle $t \in [0, 1]$ er $(Vx)(t) = t$, og $\|Vx\|_\infty = \|x\|_\infty$ slik at $\|V\|_\infty = 1$.

c) Vi skal vise at $(V^n x)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}ds$ for $n \geq 1$.

Formelen er riktig pr. definisjon for $n = 1$. Fra n til $n+1$ fås

$$
\begin{aligned}
(V^{n+1}x)(t) &= \int_0^t (V^n x)(s)ds \\
&= \int_0^t \Big(\int_0^s \frac{(s-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} x(\sigma)d\sigma \Big) ds \\
&= \int_0^t \Big(\int_\sigma^t \frac{(s-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} x(\sigma)ds \Big) d\sigma \\
&= \int_0^t x(\sigma) \Big[\frac{(s-\sigma)^n}{n!} \Big|_{s=\sigma}^{s=t} \Big] d\sigma \\
&= \int_0^t x(\sigma) \frac{(t-\sigma)^n}{n!} d\sigma.
\end{aligned}
$$

Fomelen er dermed vist. Vi får da $|(V^n x)(t)| \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}ds \, \|x\|_\infty = \frac{t^n}{n!}\|x\|_\infty \leq \frac{1}{n!}\|x\|_\infty$, og $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$. Igjen bruker vi $x(t) = 1$. Da er $(V^n x)(t) = \frac{t^n}{n!}$ og $\|V^n x\|_\infty = 1/n!$ og derfor er $\|V^n\| = 1/n!$.

d) Ligning (4) er $x = 1 + Vx$ og (5) er $x = 1 + V^2 x$. La $S(x) = 1 + Vx$, da er $\|S^2(x) - S^2(y)\| = \|V^2 x - V^2 y\| \leq 1/2\|x - y\|$, og S^2 er en kontraksjon. Altså har (4) entydig løsning. Med $T(x) = 1 + V^2 x$ fås at $\|T(x) - T(y)\| \leq 1/2\|x - y\|$ og T er kontraksjon slik at (5) har entydig løsning.
Ligningen $x = 1 + V^2 x$ har løsningen x gitt ved $x(t) = (I - V^2)^{-1}1 = \sum_{n=0}^\infty V^{2n}1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cosh t$.

Mai 1996

Oppgave 1

At indreproduktet er veldefinert følger fra at $\int_0^\infty e^{-t}t^n dt < \infty$. Kravene $i)$, $ii)$ og $iii)$ i definisjonen av indreprodukt er opplagt oppfylt. Hvis $\langle x, x\rangle = \int_0^\infty e^{-t}|x(t)|^2 dt = 0$, da er $x(t) = 0$ for alle $t \geq 0$ ved kontinuitet, og $iv)$ $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$ holder også. Altså har vi et indreprodukt. [Enklere: $\langle x, y\rangle = \langle e^{-\frac{t}{2}}x, e^{-\frac{t}{2}}y\rangle_2$ slik at $\langle \cdot, \cdot\rangle$ opplagt er et indreprodukt.]

La $e_0(t) = 1$. Da er $\|e_0\| = 1$ og $e_1(t) = 1 - t$ er slik at $e_1 \perp e_0$. Siden $\langle e_1, e_1\rangle = \int_0^\infty e^{-t}(1 - t)^2 dt = 1$, er e_0, e_1 en ortonormal basis for $\operatorname{span}\{1, t\}$. Da er $a + bt = \langle t^2, e_0\rangle\, e_0 + \langle t^2, e_1\rangle\, e_1 =$

$2e_0 + (2-6)e_1 = -2 + 4t$, det vil si at $a = -2, b = 4$. [Litt misbruk av notasjon her.]

Oppgave 2

a) La $x = \lim x_n$ i X. Gitt $\varepsilon > 0$. Da fins N slik at $n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. For $n, m \geq N$ er da $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$ og $(x_n)_n$ er en Cauchy-følge.

b) La $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. For $m > n$ er da $\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|$ som går mot 0 når $n \to \infty$ siden $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ er konvergent. Dermed er $(S_n)_n$ en Cauchy-følge i E og siden E er komplett, er $(S_n)_n$ konvergent, dvs. at $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerer i E.

Oppgave 3

a) $|(Kx)(t)| \leq \int_0^t e^{t-s}|x(s)|ds \leq \int_0^t e^{t-s}ds\|x\|_\infty = (e^t - 1)\|x\|_\infty \leq (e-1)\|x\|_\infty$. Altså er $\|Kx\|_\infty \leq (e-1)\|x\|_\infty$ og $\|K\| \leq e - 1$. Med $x(t) = 1$ er $|(Kx)(t)| = e^t - 1$ og $\|Kx\|_\infty = (e-1)\|x\|_\infty$, så $\|K\| = e - 1$.

b) For $n = 1$ gir formelen definisjonen av K. Anta at formelen holder for $n, n \geq 1$. Da er

$$\begin{aligned}
(K^{n+1}x)(t) &= \int_0^t e^{t-s}(K^n x)(s)ds \\
&= \int_0^t e^{t-s}\Big(\int_0^s e^{s-\sigma}\frac{(s-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}x(\sigma)d\sigma\Big)ds \\
&= \int_0^t e^{t-\sigma}\Big(\int_\sigma^t \frac{(s-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}ds\Big)x(\sigma)d\sigma \\
&= \int_0^t e^{t-\sigma}\frac{(t-\sigma)^n}{n!}x(\sigma)d\sigma
\end{aligned}$$

og formelen holder for $n + 1$. Dette viser formelen.
Vi får da $|(K^n x)(t)| \leq \int_0^t e^{t-s}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}x(s)ds\|x\|_\infty \leq e\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}ds\|x\|_\infty = e\frac{t^n}{n!}\|x\|_\infty \leq \frac{e}{n!}\|x\|_\infty$, som viser at $\|K^n\| \leq \frac{e}{n!}, n \geq 1$.

c) Siden $\sum_{n=0}^{\infty} \|K^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} < \infty$, er $\sum_{n=0}^{\infty} K^n$ konvergent, og siden $(K^n x)(t) = e^t \frac{t^n}{n!}$, er da $(\sum_{n=0}^{\infty} K^n x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(K^n x)(t) = e^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^{2t}$. Dvs. $\sum_{n=0}^{\infty} K^n x = y$ der $y(t) = e^{2t}, 0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 4

a) A^*A kompakt: La $(x_n)_n$ være en begrenset følge i H. Siden A er kompakt, har $(Ax_n)_n$ en konvergent delfølge, si $(Ax_{n_k})_k$. A^* er begrenset (dvs. kontinuerlig) og da er også $(A^*Ax_{n_k})_k$ konvergent. Dette viser at A^*A er kompakt.
A^*A Hermitisk: Vi har $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$, og A^*A er Hermitisk. (A^*A er begrenset.)
$\lambda \geq 0$: Hvis $A^*Ax = \lambda x$ med $x \neq 0$, så er $\lambda \langle x, x \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle$ som viser at $\lambda \geq 0$.

b) For $x \in H$ er $A^*Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ der $(e_n)_n$ er ortonormale egenvektorer for A^*A og $A^*Ae_n = \lambda_n e_n$.

c) Vi har $\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \langle Ae_n, Ae_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \langle A^*Ae_n, e_m \rangle = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \langle e_n, e_m \rangle = 1$ hvis $n = m$ og 0 ellers. Dette viser at $(f_n)_n$ er en ortonormal følge i K.
Siden $x - \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n \in \ker A^*A = \ker A$, er $Ax = \sum_n \langle x, e_n \rangle Ae_n = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle f_n$ for alle $x \in H$. At $\ker A^*A = \ker A$ føler fra at $A^*Ax = 0$ gir $\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = 0$ og da er $Ax = 0$.

Aug 1996

Oppgave 1

a) Et **indreproduktrom** er et vektorrom E over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) med et **indreprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \to \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) som oppfyller: $i)\, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $ii)\, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $iii)\, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ og $iv)\, x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$. (For $x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$).)
Avledet **norm** er gitt ved $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
Nei, $\| \cdot \|_1$ oppfyller ikke parallellogramloven: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ for for eks. $x = (1, 0, \ldots, 0)$ og $y = (0, 1, \ldots, 0)$ når $n \geq 2$. For $n = 1$ er $\| \cdot \|_1$ avledet av indreproduktet gitt ved $\langle z, w \rangle = z\overline{w}$.

b) $\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x\|^2 - 4\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = y$.

Oppgave 2

La $s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. For $m > n$ har vi $\|s_m - s_n\| = \| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k e_k\| = \sum_{k=n+1}^m |\lambda_k|^2 \to 0$ når $n, m \to \infty$ siden $\sum |\lambda_k|^2 < \infty$, og $(s_n)_n$ er en Cauchy-følge. Da er $(s_n)_n$ konvergent i H med en grense x, og vi skriver $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k e_k = x$.

Oppgave 3

a) **Banachs fikspunktteorem**: Hvis (X,d), $X \neq \emptyset$, er et komplett metrisk rom og $f : (X,d) \to (X,d)$ er en kontraksjon – dvs. det fins $\alpha < 1$ slik at $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$ for alle $x, y \in X$ – da har f et entydig fikspunkt $x^* \in X$.

b) $|(Tx)_k| = |\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}||x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}|\|x\|$, så $\|T\| \leq \max_k(\sum_j |a_{kj}|) = \sum_j |a_{lj}|$ for en l. La $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ der $x_j = |a_{lj}|/a_{lj}$ hvis $a_{lj} \neq 0$ og $x_j = 1$ ellers. Da er $\|x\| = 1$ og $\|Tx\| \geq |\sum_j a_{lj}x_j| = \sum_j |a_{lj}|$, så $\|T\| = \max_k(\sum_j |a_{kj}|)$.

c) Skriv ligningen som $x = Ax + b$ med $b = (-2, 1, 2, -1)^T$. Matrisen A er da slik at $f(x) = Ax + b$ blir en kontraksjon siden (fra b)) $\|A\| = \max_k(\sum_j |a_{kj}|) = \max(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}) = \frac{5}{6} < 1$, og Jacobi-iterasjon gir x^* med $f(x^*) = x^*$, dvs. $x^* = Ax^* + b$.

Oppgave 4

a) $|(Vx)(t)|^2 = |\int_a^t x(s)ds|^2 \leq (\int_a^t ds)(\int_a^t |x(s)|^2 ds) \leq (t-a)\|x\|^2 \Rightarrow$
$\|Vx\| = (\int_a^b |(Vx)(t)|^2 dt)^{1/2} \leq [\frac{(t-a)^2}{2}|_a^b]^{1/2}\|x\| = \frac{b-a}{\sqrt{2}}\|x\|$, dvs. $\|V\| \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}}$.

b) $\langle V^*x, y\rangle = \langle x, Vy\rangle = \int_a^b x(s)(\int_a^s \overline{y(t)}dt)ds = \int_a^b(\int_t^b x(s)\overline{y(t)}ds)dt =$
$\int_a^b(\int_t^b x(s)ds)\overline{y(t)}dt \Rightarrow (V^*x)(t) = \int_t^b x(s)ds$.

Oppgave 5

a) $i) \Rightarrow ii)$: $\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\|\|x\| \to 0$ pga. $i)$.
$ii) \Rightarrow iii)$: $|\langle A_n x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle| = |\langle A_n x - Ax, y\rangle| \leq \|A_n x - Ax\|\|y\| \to 0$ pga. $ii)$.

b) $\langle A_n x, y\rangle = \langle x, e_1\rangle \langle e_n, y\rangle \to 0$ siden $\sum_n |\langle e_n, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2$ (Bessels ulikhet) gir $\langle e_n, y\rangle \to 0$. Dvs. $\langle A_n x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle$ der $A = 0$, og $iii)$ holder. Hvis $i)$ holder, da må $A = 0$, og $\|A_n x\| = |\langle x, e_1\rangle| = 1$ for $x = e_1$ viser at $ii)$ ikke holder. Da holder heller ikke $i)$.

c) $\langle A_n^* x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle = \langle x, e_n\rangle \langle e_1, y\rangle = \langle\langle x, e_n\rangle e_1, y\rangle$, så $A_n^* x = \langle x, e_n\rangle e_1$. Da har vi $\|A_n^* x\| = |\langle x, e_n\rangle| \to 0$, så $ii)$ holder (med '$A = 0$') og derfor holder $iii)$. $i)$ holder ikke siden $\|A_n^*\| = 1$ og grensen kan bare være 0.

August 1997 (Kommentarer)

Oppgave 1

a) Se definisjon 1.4-3 i Kreyszig.

b) Se LF oppgave 1b) øving 2.

Oppgave 2

a) Se teorem 5.1-2 i Kreyszig og LF oppgave 3b) øving 2.

b) Vis formelen i hintet ved induksjon. Formelen viser at F^4 er en kontraksjon. Med $x_0 = 0$ fås at $(F^n 0)(t) = t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$ og løsningen er x^* gitt ved $x^*(t) = e^t - 1$.

Oppgave 3

a) Cauchy-Schwarz over intervallet $(0, t)$ gir $|(Kx)(t)|^2 \leq \frac{t^3}{3}\|x\|^2$ som gir at $\|K\| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

b) Direkte regning på $\langle K^*x, y\rangle = \langle x, Ky\rangle = \int_0^1 x(t)(\int_0^t s\overline{y(s)}ds)dt$ etc. med bytte av integrasjonsrekkefølgen som i oppgave 5 øving 5 gir formelen.

Oppgave 4

a) AB: Start med en begrenset følge $(x_n)_n$. Vis at $(Bx_n)_n$ er begrenset (fra B begrenset) og at $(ABx_n)_n$ da har konvergent delfølge (fra A kompakt).
BA: Start igjen med en begrenset følge $(x_n)_n$. Nå gir først A kompakt en konvergent delfølge og så konvergerer B av denne.

b) Se LF oppgave 3b) øving 6.

Oppgave 5

Fra $(Ax = \lambda x \Rightarrow A^n x = \lambda^n x)$ følger at alle egenverdiene er 0. Bruk så spektralteoremet, eller at $\pm\|A\|$ er en egenverdi.