SIF5003 Matematikk 1, 6. desember 2000

Løsningsforslag

Oppgave 1

Dreid om y–aksen: (iv). Dreid om $x = -1$: (iii).

Oppgave 2

Om bredden på rektanglet er $2x$ og høyden er y finner vi for det ukjente arealet A og den kjente omkretsen 10:

$$\begin{aligned} A &= 2xy + \tfrac{1}{2}\pi x^2, \\ 10 &= (2+\pi)x + 2y. \end{aligned}$$

Den siste ligningen gir $y = 5 - (1 + \pi/2)x$, så

$$A = 10x - (2+\pi)x^2 + \tfrac{1}{2}\pi x^2 = 10x - (2 + \tfrac{1}{2}\pi)x^2.$$

Her kan x variere fra 0 til den verdien som gir $y = 0$, altså $0 \le x \le 10/(2+\pi)$. Vi ser etter et maksimum i det indre av dette intervallet:

$$\frac{dA}{dx} = 10 - (4+\pi)x = 0 \text{ når } x = \frac{10}{4+\pi}.$$

Denne verdien ligger i det indre av intervallet, og siden $A(x)$ er et annengradspolynom med negativ ledende koeffisient trenger vi ikke en gang sjekke endepunktene. Den tilsvarende verdien for y er

$$y = 5 - \Bigl(1 + \frac{\pi}{2}\Bigr)x = 5 - \frac{10+5\pi}{4+\pi} = \frac{10}{4+\pi}.$$

Det optimale rektanglet er altså $\dfrac{20}{4+\pi}$ m bredt og $\dfrac{10}{4+\pi}$ m høyt.

Oppgave 3

a Vi prøver oss med forholdskriteriet:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)4^{n+1}}}{\dfrac{x^{n+2}}{n(n+2)4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{|x|}{4} = \frac{|x|}{4}$$

så rekken konvergerer når $|x| < 4$ og divergerer når $|x| > 4$, og konvergensradien blir $R = 4$.

For $x = \pm 4$ er

$$\left|\frac{x^{n+2}}{n(n+2)4^n}\right| = \frac{16}{n(n+2)} < \frac{16}{n^2},$$

så rekken er absolutt konvergent ved sammenligning med den konvergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 16/n^2$.

b Leddvis derivasjon (som er tillatt i det indre av konvergensintervallet, altså for $|x| < 4$) gir

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n4^n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n = -x\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)$$

hvor den siste likheten fremkommer ved å bytte ut x med $-x/4$ i den kjente rekken

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

eller ved å derivere en gang til, som gir en geometrisk rekke med kjent sum, og så integrere tilbake.

Oppgave 4

Erstatter vi x med t^4 i den oppgitte formelen får vi

$$\sqrt{1+t^4} = 1 + \frac{t^4}{2} - \frac{1}{8}\frac{t^8}{(1+z)^{3/2}}, \qquad 0 < z < t^4.$$

Så lenge $0 < t < 1$ er da også $0 < z < 1$, slik at $1 < (1+z)^{3/2} < 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$. Dermed er

$$1 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^8}{16\sqrt{2}} < \sqrt{1+t^4} < 1 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^8}{8}.$$

Vi vil integrere denne ulikheten over $[0,1]$. Vi har

$$\int_0^1 \Big(1 + \frac{t^4}{2}\Big)\,dt = \Big[t + \frac{t^5}{10}\Big]_0^1 = 1{,}1, \qquad \int_0^1 t^8\,dt = \frac{1}{9}$$

slik at

$$1{,}1 - \frac{1}{9\cdot 16\sqrt{2}} < \int_0^1 \sqrt{1+t^4}\,dt < 1{,}1 - \frac{1}{9\cdot 8}$$

som praktisk talt er hva vi skulle vise.

Oppgave 5

Kall de tre funksjonene i grafene A, B og C. Om vi setter $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ skal vi identifisere F, F' og F'' blant A, B og C. Her finnes nær sagt utallige muligheter for å eliminere mulighetene slik at bare en gjenstår. For eksempel kan vi merke oss at:

- $A' \neq B$ fordi $A'(x) > 0$ når $x < 0$,
- $B' \neq C$ fordi $B'(0) > 0$,
- $C' \neq A$ og $C' \neq B$ fordi $C'(0) < 0$.

Eneste gjenstående muligheter er $A' = C$, $B' = A$, slik at $B = F$, $A = B' = f$, $C = A' = f'$.

Sagt med andre ord: A) er (i); B) er (iii); C) er (ii).

Vi finner

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = F(1) - F(-1) = B(1) - B(-1) = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave 6

Om vi kaller musepopulasjonen $P(t)$ finner vi

$$P' = k\bigl(1 - \cos(2\pi t)\bigr)P.$$

Dette er en separabel differensialligning med konstant løsning $P = 0$, som vi løser slik:

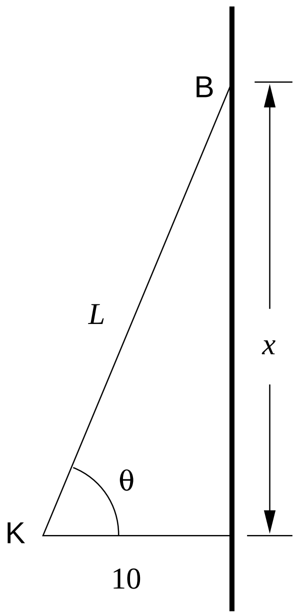
$$\begin{aligned}\int \frac{dP}{P} &= k\int \bigl(1-\cos(2\pi t)\bigr)\,dt;\\ \ln P &= k\Bigl(t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Bigr) + C_1;\\ P &= C\exp\left(k\Bigl(t-\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Bigr)\right).\end{aligned}$$

Dataene vi har fått oppgitt gir $P(0) = 10$ og $P(1) = 20$, som innsatt gir $C = 10$, $Ce^k = 20$. Så vi har $k = \ln 2$, og derfor

$$P(t) = 10\exp\left(\Bigl(t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Bigr)\ln 2\right) = 10\cdot 2^{t-\sin(2\pi t)/(2\pi)}.$$

Oppgave 007

Fra figuren (kameraet i K, agenten i B) finner vi



$$x = 10\tan\theta$$

som ved derivasjon med hensyn på tiden t gir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Men figuren gir også

$$\cos\theta = \frac{10}{L},$$

og kombinerer vi disse resultatene får vi

$$\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \frac{\cos^2\theta}{10}\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{10}{L^2}\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{10}{30^2}0{,}9 = 0{,}01$$

som er et mål på hvor fort kameraet dreier, i radianer per sekund.

(Det er flere andre relasjoner som kan leses ut av figuren og eventuelt deriveres, slik at oppgaven kan løses på mange måter. Den ovenstående er den korteste av alle løsningene vi har funnet så langt.)

Oppgave 8

Det er antagelig greiest i begge tilfellene å bare regne ut arealet av den høyre halvdelen av kurven og så gange med to.

For den første kurven er høyre halvdel gitt ved $0 \le t \le \pi$, og arealet er gitt ved:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\int_{t=0}^{\pi} y\,dx = 2\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin(2t)\cos t\,dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \sin t\cos^2 t\,dt = 2\big[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_0^{\pi} = \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

For den andre kurven er gyldige verdier av θ gitt ved $r^2 \ge 0$, altså $\cos(2\theta) \ge 0$. Det gir oss

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \le \theta \le \frac{\pi}{4} + k\pi$$

for et heltall k. For hver lovlig θ har vi to mulige valg: $r = \pm\sqrt{\cos(2\theta)}$. Å velge minustegnet er jevngodt med å legge π til θ og velge plusstegnet, så vi finner at høyre halvdel gitt ved

$$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad r \ge 0,$$

og arealet blir

$$A_2 = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\,d\theta = \big[\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Siden $4/3 > 1$ må den første kurven være den ytterste.

Oppgave 9

For å finne Taylorpolynomet til annen grad i $x = 1$ trenger vi å finne $f(1)$, $f'(1)$ og $f''(1)$.

Setter vi inn $x = 1$ i den gitte ligningen finner vi $ye^y = 0$, så $y = 0$, og derfor er $f(1) = 0$.

Deriverer vi den gitte ligningen med hensyn på x får vi

$$2x + (1+y)e^y y' = 0. \tag{1}$$

Setter vi så inn $x = 1$ og $y = 0$ her, får vi $2 + y' = 0$, slik at $f'(1) = -2$.

Til sist deriverer vi (1) med hensyn på x og finner

$$2 + (2+y)e^y(y')^2 + (1+y)e^y y'' = 0.$$

Her kan vi sette inn $x = 1$, $y = 0$ og $y' = -2$ som gir $2 + 2(-2)^2 + y'' = 0$, slik at $f''(1) = -10$.

Taylorpolynomet av annen grad er derfor

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = -2(x-1) - 5(x-1)^2.$$