Taylorpolynom

Taylorpolynomet av n–te grad til f i $x = a$ er et polynom $P_n(x)$ slik at

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Det finnes kun ett polynom med disse egenskapene: $Q_n(x) = P_n(x + a)$ blir også et polynom av grad n, og kan skrives

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j.$$

Men $P_n(x) = Q_n(x - a)$ gir da

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j (x - a)^j.$$

Direkte utregning gir

$$P_n^{(k)}(a) = k!\, c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Så vi må ha

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Taylors restledd

Taylors formel er en formel for *restleddet* $R_n(x)$ når vi skriver

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

hvor $P_n(x)$ er Taylorpolynomet av n–te grad til $f(x)$ i $x = a$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

for et eller annet punkt z mellom a og x.
Om vi skriver ut i detalj:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Merk at restleddet har samme form som siste ledd i neste Taylorpolynom $P_{n+1}(x)$,
bortsett fra at $f^{(n+1)}(a)$ er byttet ut med $f^{(n+1)}(z)$.

En annen variant av Taylors formel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$$

kan vises ved induksjon på n (krever delvis integrasjon), og formen foran følger ved en variant av middelverdisetningen for integrasjon.