Delvis integrasjon

E&P-utgaven:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Dersom vi setter

$$\begin{aligned} u &= G(x) & dv &= f(x)\,dx \\ du &= g(x)\,dx & v &= F(x) \\ G' &= g & F' &= f \end{aligned}$$

så får vi Rottmannutgaven:

$$\int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,dx.$$

Delvis integrasjon for *bestemte* integraler:

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

Sidesprang: Taylors formel ved delvis integrasjon

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt &= f(a) + \Big[f'(t)\cdot(t-b)\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f''(t)\cdot(t-b)\,dt \\ &= f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + \int_a^b f''(t)\cdot(b-t)\,dt \end{aligned}$$

der jeg har gjort delvis integrasjon med

$$\begin{aligned} u &= f'(t) & dv &= dt \\ du &= f''(t)\,dx & v &= t-b \end{aligned}$$

Ny delvis integrasjon på det siste integralet, nå med

$$\begin{aligned} u &= f''(t) & dv &= (b-t)\,dt \\ du &= f'''(t)\,dx & v &= -\frac{(b-t)^2}{2} \end{aligned}$$

leder til

$$f(b) = f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)\cdot(b-t)^2\,dt$$

Taylors formel (forts)

og fortsetter vi slik, ender vi med *integralutgaven av Taylors formel* (der jeg har byttet ut b med x):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

En variant av middelverdisetningen for integraler forteller at det finnes en z mellom a og x slik at

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = \int_a^x f^{(n+1)}(z)(x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

og fra det får vi Taylors formel på den vanlige formen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}.$$

Noen trigonometriske identiteter

Et par grunnleggende identiteter:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Med $x = -y$ i den siste får vi den velkjente $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,
og med $x = y$ får vi

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

og av dette får vi så

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Disse gjør det veldig enkelt å integrere $\sin^2 x$ og $\cos^2 x$.

Også nyttig:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Delbrøkoppspalting

Strategi for integrasjon av *rasjonale funksjoner* (brøker med polynom i teller og nevner):

- Gjør polynomdivisjon, få grad($teller$) $\leq$ grad($nevner$).
- Faktoriser nevneren; forkort bort eventuelle felles faktorer i teller og nevner.
- Teorem: Brøken kan skrives som en sum av enkle brøker, basert på faktorene i nevneren. Skriv opp den tilhørende ligningen.
- Gang med fellesnevneren, få polynomligning.
- Sammenlign koeffisienter i polynomene, still opp ligninger, løs dem.
- Integrerer småbrøkene enkeltvis.