Oversikt over Matematikk 1

Induksjon

Grenser og kontinuitet

- Skjæringssetningen
- Eksistens av ekstrempunkt

Elementære funksjoner

Derivasjon

- Sekantsetningen

Integrasjon

Differensialligninger

Kurver i planet

Rekker

Elementære funksjoner

Algebraiske funksjoner

- Potenser, polynomer, røtter, rasjonale funksjoner

Eksponensial- og logaritmefunksjoner

$$\exp x = y \Longleftrightarrow \ln y = x; \qquad a^x = \exp(x \ln a)$$

Trigonometriske og omvendte trigonometriske funksjoner

$$\sin, \quad \cos, \quad \tan, \quad \arcsin, \quad \arccos, \quad \arctan$$

Hyperbolske og omvendte hyperbolske funksjoner

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

og småkompliserte formler for arcsinh**,** arccosh **og** arctanh**.**

Derivasjon

Sekantsetningen

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

for en z mellom a og b.

- Monotonitet vs fortegnet på den deriverte
- Omvendte funksjoner
  - Eksistens
  - Derivasjon

Derivasjon – anvendelser

Kurvedrøfting

- Stigende / voksende
- Konkavitet / konveksitet
- Vendepunkter

Optimalisering: Å finne minimum og maksimum

- Sjekk *kritiske punkter* (der $f' = 0$ eller f' ikke eksisterer) og *endepunkter* for definisjonsintervallet.

Implisitt derivasjon

$$\text{for eksempel } x^4 + y^4 = 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3}$$

Relaterte rater

$$\text{for eksempel } x^4 + y^4 = 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Derivasjon – flere anvendelser

L'Hôpitals regel

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0 :$$

For de første to:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Men ikke glem å sjekke betingelsene (0/0 eller ∞/∞)!

Newtons metode for å løse $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Integrasjon

Riemannsummer

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$$

Antiderivert

- Fundamentalsetningen:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x), \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Integrasjon (forts)

Integrasjonsmetoder

- Delvis integrasjon
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
(produktregelen i revers)
- Substitusjon
Sett inn $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$ formelt i integralet.
- Delbrøkoppspalting
$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^3(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+2}$$
- Spesielle triks
Mange, se spesielt E&P avsnitt 9.4 for trigonometriske integraler.
- Tabelloppslag kombinert med metodene over

Integrasjon (forts)

"Uekte" eller "uegentlige" integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

og tilsvarende om $f(x) \to \pm\infty$ i et endepunkt.

Integrasjon (forts)

Anvendelser

- Buelengde
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
- Areal
$$dA = y\,dx$$
- Volum: *Cavalieris prinsipp*
$$dV = A(x)\,dx$$
- Arbeid – og mange andre fysiske anvendelser
$$dW = F\,dx$$
- Akkumulert formue – og mange andre økonomiske størrelser

Integrasjon (forts)

Numerisk integrasjon

- Trapesregelen
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\big)$$
- Midtpunktregelen
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Big)$$
- Simpsons metode
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\big)$$

  (vektene er $1, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots, 4, 2, 4, 1$, og n må være et *liketall*)

Integrasjon (forts)

Feilestimater i numerisk integrasjon

- Trapesregelen
$$|ET_n| \le \frac{K_2(b-a)^3}{12\,n^2}$$
- Midtpunktregelen
$$|EM_n| \le \frac{K_2(b-a)^3}{24\,n^2}$$
- Simpsons metode
$$|ES_n| \le \frac{K_4(b-a)^5}{180\,n^4}$$

Her er K_k en øvre skranke for $|f^{(k)}|$ over $[a,b]$:
$$|f^{(k)}(x)| \le K_k \text{ for alle } x \in [a,b].$$

Se for øvrig Rottmann!

Differensialligninger

Separable:
$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

- Generell løsning:
$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$
- Entydig løsning for initialverdiproblemet (gitt $y(x_0) = y_0$):
$$\int_{y_0}^{y} g(\eta)\,d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$$

  (Neida, vi har ikke forelest denne formelen, og det forventes ikke at dere skal kunne den.)

I praksis er det som regel greiere å finne integrasjonskonstanten fra den generelle løsningen ved å sette inn for initialbetingelsen.

Kurver i planet

Polarkoordinater

$$x = r\cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$
$$y = r\sin\theta \qquad \tan\theta = y/x$$

Den siste ligningen er bare *nesten* nok til å gi riktig θ – du må sjekke hvilken kvadrant (x, y) befinner seg i, og eventuelt justere θ ved å legge til eller trekke fra π.

Parametrisering

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad t \in I$$

- Glatt kurve: f' og g' eksisterer og er kontinuerlige, og er aldri null samtidig.

Kurver i planet (forts)

Integralformler

- Buelengde
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
- Arealformler
  Areal mellom en kurve og origo:
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,d\theta$$
- Areal av rotasjonsflate
- Volum av rotasjonslegeme
  - Skivemetoden (*Cavalieris prinsipp* igjen)
  - Sylinderskallmetoden

De ovenstående utledes stort sett av tilsvarende formler for kurver gitt i vanlige x, y-koordinater, ved å sette inn $dx = x'\,dt$ og $dy = y'\,dt$.

Men *pass på* fortegnet, og at ikke noe areal dekkes mer enn en gang (eller overhode ikke) – her ligger mange farer på lur!

Rekker

Følger og konvergens

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Regneregler

- Linearitet
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
- Skifte av summasjonsvariabel, for eksempel
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}b_n = a_0b_1 + a_1b_2 + a_2b_3 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{n+1}$$

Rekker (forts)

Spesielle rekker

- Geometrisk rekke
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
- p-rekke, konvergent presis når $p > 1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
  - Harmonisk rekke ($p = 1$), divergent
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Rekker (forts)

Konvergenstester

- n-teleddstesten
  Om $\sum a_n$ konvergerer så må $a_n \to 0$
- Alternerende rekke
  Om $a_{n-1} \geq a_n \geq 0$ for alle n og $a_n \to 0$ så konvergerer $\sum (-1)^n a_n$.

Viktig poeng for rekker med *positive* ledd:
Om $a_n > 0$ for alle n så er *enten* $\sum a_n$ *konvergent* eller $\sum a_n = \infty$.

- Integraltesten
  Om $a_n = f(n)$, $f(x) > 0$ for alle x og f er *avtagende* så er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

- Sammenligningstesten
  Om $0 \leq a_n \leq b_n$ og $\sum b_n < \infty$, er $\sum a_n < \infty$

Rekker (forts)

Konvergenstester (forts)

- Grensesammenligningstesten
  Om $a_n > 0$ og $b_n > 0$ og

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

  så er $\sum a_n$ og $\sum b_n$ enten begge konvergente eller begge divergente.
- Forholdstesten
  Om $a_n > 0$ for alle n og

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

  eksisterer, gjelder: Om $L < 1$ er $\sum a_n$ *konvergent*, om $L > 1$ er $\sum a_n$ *divergent*, om $L = 1$ kan alt skje.
- Rottesten
  Som forholdstesten, med

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$$

Rekker (forts)

Absolutt og betinget konvergens

Betrakt en rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- Rekken er *absolutt konvergent* om

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

  En absolutt konvergent rekke er konvergent.
- Den er *betinget konvergent* om den er konvergent men ikke absolutt konvergent.

Rekker (forts)

Integraltesten, *(grense-)sammenligningstesten*, *forholdstesten* og *rottesten* virker i utgangspunktet på rekker med positive ledd. Ta absoluttverdien av leddene, så tester de absolutt konvergens for generelle rekker.

For eksempel:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

kan brukes til å teste for absolutt konvergens.

Restleddestimater:

- For *alternerende rekker* er restleddet mellom 0 og neste ledd i rekka, forutsatt at *alle* betingelsene for konvergens av alternerende rekker holder.
- Dersom integraltesten kommer til anvendelse blir

$$|R_n| \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Taylors formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

hvor z er mellom a og x. $R_n(x)$ kalles *restleddet*.

Hvis $R_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$, konvergerer *Taylorrekken*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorrekken for $a = 0$ kalles *Maclaurinrekken*.

Noen berømte Maclaurinrekker:

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Potensrekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Det meste av tiden holder vi oss til tilfellet $c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

En slik rekke har en *konvergensradius* R:

- Rekken *konvergerer absolutt* for $|x| < R$,
- Rekken *divergerer* for $|x| > R$,
- Alt kan skje for $x = \pm R$.

R kan godt være 0 eller ∞.
Bestemmes som regel enklest ved hjelp av forholdstesten.

Potensrekker (forts)

- Potensrekker kan deriveres og integreres leddvis:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$$

- Konvergensradien er uendret ved disse operasjonene.
- Dette kan brukes til å finne summen av ukjente rekker, for eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot n} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!}\,dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,dt = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$$

(Vi klarer riktignok ikke regne ut det siste integralet, men dette gir likevel litt innsikt.)

Potensrekker (forts)

Andre regneregler for potensrekker

- Lineariteten arves fra generelle rekker:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- Multiplikasjonsregelen sitter litt dypere:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

Til slutt: Denne oversikten er selvfølgelig alt for kort til å være fullstendig. Spesielt savnes kanskje teknikker for å stille opp et problem matematisk ut fra en språklig beskrivelse (såkalte uoppstilte problemer), men slikt krever erfaring, og er vanskelig å oppsummere.