Hatteproblemet

n herrer er på restaurant sammen. Alle har hatt, og leverer hatten i garderoben når de kommer. Når de går (litt på en snurr), får hver av dem utdelt en tilfeldig hatt. Hva er *sannsynligheten* for at *ingen av dem* får sin egen hatt tilbake?

(Hva har dette med *potensrekker* å gjøre? Følg med.)

Binomialrekken

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad |x| < 1$$

der

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{(n)}}{n!}$$

og

$$\alpha^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

Notasjonen er mye brukt, men ikke universell. Merk at

$$\alpha^{(0)} = 1 \text{ og } \alpha^{(n+1)} = (\alpha - n)\alpha^{(n)}$$

Hvor kommer binomialrekken fra?

Setter vi $f(x) = (1+x)^\alpha$ finner vi

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\ &\cdots & &\cdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha^{(n)}(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) &= \alpha^{(n)} \end{aligned}$$

så Maclaurinrekken til $f(x)$ *er* virkelig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Men hvordan vet vi at den *konvergerer* mot $(1+x)^\alpha$? Det følger av Taylors formel for $0 \le x < 1$, men er mer vrient å vise for $-1 < x < 0$. I det minste sjekker vi lett at *konvergensradien* er 1.

Leddvis derivasjon og integrasjon av potensrekker

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Alle rekkene får *samme konvergensradius*.

Eksempel:

$$\ln(1-x) = -\int_1^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Algebraisk manipulasjon av potensrekker

Å *addere* to potensrekker er lett nok:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

Å *multiplisere* dem er litt mer vrient:

$$\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\Bigr) x^n$$

Hatteproblemet igjen

n herrer, n hatter deles ut tilfeldig. Hva er *sannsynligheten* p_n for at *ingen av dem* får sin egen hatt tilbake?

Først: Sannsynligheten for at presis k av dem ($0 \le k \le n$) får sin egen hatt tilbake er

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{n-k+1} \cdot p_k = \frac{n^{(k)}}{k!} \cdot \frac{1}{n^{(k)}} \cdot p_k = \frac{p_k}{k!}$$

Siden dette må inntreffe for presis en k, er

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k!} = 1$$

Hva sier dette om funksjonen definert ved potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad ?$$

Hatteproblemet fortsatt

$$e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Med andre ord,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}\Big) x^n$$

og derfor

$$p_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

(f kalles en *genererende funksjon* for følgen $\{p_n\}$. Teknikken med genererende funksjoner er meget nyttig i slike kombinatoriske problemer som dette.)