NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5003 Matematikk 1 for F1 høsten 2002

Løsningsforslag - Øving 2

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.1

30–35 30: Den deriverte til f i figur 3.1.19 har grafen i figur 3.1.25(c) fordi $f(x)$ er voksende for $x < 0$ (det vil si, $f'(x) > 0$) og avtagende for $x > 0$ (det vil si, $f'(x) < 0$).

31: Den deriverte til f i figur 3.1.20 har grafen i figur 3.1.25(e) av lignende årsaker.

32: Den deriverte til f i figur 3.1.21 har grafen i figur 3.1.25(b) fordi $f'(x) = 0$ i to punkter.

33: Den deriverte til f i figur 3.1.22 har grafen i figur 3.1.25(a).

34: Den deriverte til f i figur 3.1.23 har grafen i figur 3.1.25(f).

35: Den deriverte til f i figur 3.1.24 har grafen i figur 3.1.25(d).

40 Vannvolum (i gallon) etter tid t (i sekunder):

$$V(t) = 10\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$$

a) Volumet endres med en rate

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

Ved $t = 60$ får vi $dV/dt = -0{,}08$, så etter 1 minutt lekker vannet ut med en rate av 0,08 gallon pr. sekund.

b) Gjennomsnittlig volumendringsrate fra $t = 0$ til $t = 100$ er

$$\frac{V(100) - V(0)}{100} = -0,1.$$

Dette er lik øyeblikksraten når

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{t}{100}\right) = -0{,}1 \Rightarrow t = 50,$$

altså etter 50 sekunder.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.3

60 Haglkornet er kuleformet slik at volumet av det er

$$V(r) = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

hvor r er radius. Radien er avhengig av tiden, $r = r(t)$. Ved et gitt tidspunkt $t = a$ er radien $r(a) = 2\,\mathrm{cm}$. Samtidig minker volumet med $0.1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Det vil si

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{t=a} = -0.1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}.$$

Vi deriverer ved hjelp av kjerneregelen og finner

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

som gir

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

Ved tiden $t = a$ minker dermed radien med

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=a} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot(2\,\mathrm{cm})^2}\cdot(-0.1\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}) \approx -0.002\,\mathrm{cm/s}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.5

40 Vi skal finne ekstremalverdiene til funksjonen

$$f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$$

på intervallet $[0, 4]$. f er deriverbar i $(0, 4)$, og

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} - \tfrac{3}{2}x^{1/2}.$$

Setter vi dette lik 0, får vi det kritiske punktet $x = 1/3$, som gir verdien $f(1/3) = 2\sqrt{3}/9$. Endepunktene gir $f(0) = 0$ og $f(4) = -6$. Maksimumsverdien er altså $2\sqrt{3}/9$, og minimumsverdien er -6.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.6

12 Hva er maksimalt volum av en rett sirkulær sylinder med overflateareal 150π?

Hvis sylinderen har radius r og høyde h, er overflaten

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) = 150\pi \Rightarrow h = \frac{75}{r} - r,$$

der vi må ha $r < \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ for å få $h > 0$. Volumet blir da

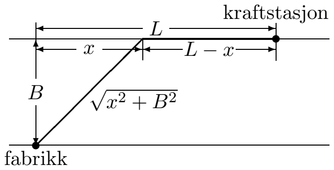
$$V(r) = \pi r^2 h = \pi(75r - r^3),$$

der $0 < r < 5\sqrt{3}$. For å få et lukket intervall kan vi legge til punktene $r = 0$ og $r = 5\sqrt{3}$, som begge gir $V(r) = 0$. Dette kan selvsagt ikke være maksimum, så ifølge teorem 3 (*Absolute Maxima and Minima*) fra avsnitt 3.5 har V et absolutt maksimum i et kritisk punkt i intervallet $(0, 5\sqrt{3})$. Vi får

$$\frac{dV}{dr} = \pi(75 - 3r^2) = 0 \Rightarrow r = 5.$$

Maksimalt volum er altså $V(5) = 250\pi$.

46 En kabel skal legges fra kraftstasjonen til fabrikken slik at prisen blir lavest mulig. Prisen pr. meter er 3 ganger så høy under vann som på land.



Det er klart at veien består av en rett diagonal under vann og et rett stykke langs elvebredden. Vi kan sette meterprisen til 1 på land og 3 under vann. Med størrelser som på figuren får vi kostnaden

$$K(x) = L - x + 3\sqrt{x^2 + B^2}, \quad 0 \le x \le L$$

Derivasjon gir

$$K'(x) = -1 + 3\frac{x}{\sqrt{x^2 + B^2}}.$$

Setter vi dette lik 0, finner vi det kritiske punktet

$$x = \frac{B}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}B}{4}.$$

Innsetting viser at denne x-verdien gir lavere kostnad enn endepunktene 0 og L. (En annen måte å se det på er å utvide definisjonsområdet til K til (a, b), der $a < 0$ og $b > L$. Da er det opplagt at endepunktene ikke gir billigste løsning.)

I oppgaven er $L = 4500$ m og $B = 2000$ m. Vi skal da legge kabelen på skrå under vann en lengde $\sqrt{x^2 + B^2} \approx 2121$ m og langs bredden en lengde $L - x \approx 3793$ m.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.7

74 La, som på figuren i oppgaveteksten, y være ballongens høyde, og θ være elevasjonsvinkelen. Fra figuren ser vi at $y = 300\tan\theta$ (ft), så ved kjerneregelen får vi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{300}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Vi gjør om til radianer før vi setter inn: $45° = \pi/4$ rad, $1° = \pi/180$ rad. Når $\theta = 45°$ og $d\theta/dt = 1°$ per sekund er dermed ballongens vertikale hastighet

$$\frac{dy}{dt} = \frac{300}{1/2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3} \approx 10{,}47 \quad \text{(ft/s)}.$$

80 I situasjonen som beskrives i oppgaveteksten er $D = 20/\cos\theta$, og lyspunktets høyde er $H = D\sin\theta$, tegn figur. Lysintensiteten I i gangveien er

$$I = \frac{k\sin\theta}{D^2} = \frac{k}{400}\sin\theta\cos^2\theta, \qquad 0 < \theta < \pi/2,$$

og

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{k\cos\theta}{400}(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = \frac{k\cos\theta}{400}(1 - 3\sin^2\theta).$$

For $0 < \theta < \pi/2$ er $dI/d\theta = 0$ når $\sin\theta = 1/\sqrt{3}$. Siden $I \to 0$ når $\theta \to 0^+$ og når $\theta \to (\pi/2)^-$ oppnår I sin maksimumsverdi for $\sin\theta = 1/\sqrt{3}$, da er $\cos\theta = \sqrt{2/3}$, og den optimale høyden H_0 for lyspunktet er følgelig gitt ved

$$H_0 = \frac{20}{\sqrt{2/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \quad \text{(m)}.$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

5 Tegn figur, og merk at når vannhøyden i akvariet er y (cm) har vannoverflaten areal $A = \pi y(60 - y)$. Så ved kjerneregelen (og $dV/dy = A$) er

$$50 = \frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dy}{dt} = \pi y(60 - y)\frac{dy}{dt}.$$

Når $y = 10$, er således $50 = 500\pi\frac{dy}{dt}$, eller $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10\pi}$ (cm/s).

11 Tegn figur. La $a(t)$ være avstanden i meter fra bilen til politimannen, og $b(t)$ være avstanden i meter fra bilen til tunnelåpningen ved tiden t målt i sekunder. Vi antar at bilen passerer skiltet ved $t = 0$. Opplysningene i teksten gir da

$$\begin{aligned} b(t) &= \sqrt{\big(a(t)\big)^2 - 200^2}, \\ a(0) &= \sqrt{200^2 + 200^2} = \sqrt{2} \cdot 200, \\ a'(0) &= 65 \cdot \frac{1000}{3600}. \end{aligned}$$

Vi deriverer $b(t)$ ved hjelp av kjerneregelen, og finner

$$b'(t) = \frac{2 \cdot a(t) \cdot a'(t)}{2\sqrt{\big(a(t)\big)^2 - 200^2}}.$$

For å finne hastigheten til bilen idet den passerer skiltet setter vi inn for $t = 0$,

$$b'(0) = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 200 \cdot 65 \cdot \frac{1000}{3600}}{2 \cdot 200} = \sqrt{2} \cdot 65 \cdot \frac{1000}{3600} \approx 25.5.$$

Det vil si at bilen kjører i 25.5 m/s, som tilsvarer 91.9 km/h. Den kjører altså for fort.