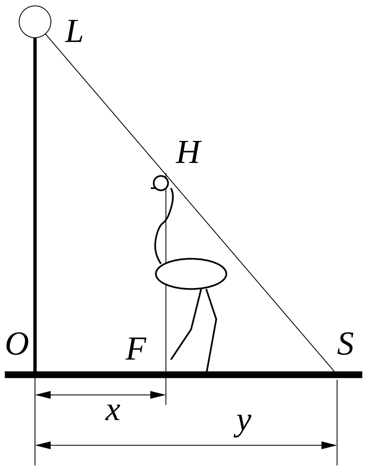
Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.8

40



La $x(t) = |OF|$ være strutsens avstand fra lysmastens fot, og la $y(t) = |OS|$ være avstanden mellom skyggens endepunkt og lysmastens fot. Da er $x'(t) = -4$ ft/s, og vi søker $y'(t)$.
Trekanten OLS med hjørner i lysmastens fot, lyskilden og skyggens endepunkt er likedannet (likeformet) med trekanten FHS med hjørner i strutsens fot, strutsens topp og skyggens endepunkt. Derfor gjelder

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{10}{5},$$

det vil si, $y(t) = 2x(t)$ og derved $y'(t) = 2x'(t) = -8$ ft/s. Skyggens endepunkt beveger seg altså med hastighet 8 ft/s (siden avstanden til lysmastens fot avtar med 8 ft/s).
Lengden av skyggen er $d(t) = y(t) - x(t) = x(t)$, slik at $d'(t) = x'(t) = -4$ ft/s. Det vil si, den avtar med 4 ft/s.

45 Lag et koordinatsystem med personen i origo og dragen i (x, H) (se figur i boka). Hvis dragesnoren har lengde L, gir Pytagoras

$$x^2 + H^2 = L^2.$$

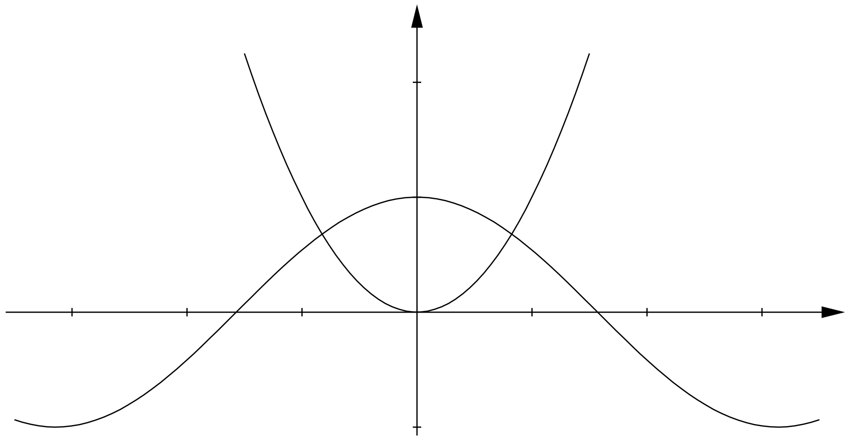
Dragen blåser horisontalt, slik at H er konstant, mens x og L er funksjoner av tiden. Implisitt derivasjon gir da

$$2x\frac{dx}{dt} = 2L\frac{dL}{dt}.$$

Det er oppgitt at $L = 500$ og $H = 400$, som gir $x = \sqrt{L^2 - H^2} = 300$ (alt i fot), og at $dx/dt = 10$ (fot pr. sekund). Vi løser vi mhp. den ukjente dL/dt og finner at snoren vikles ut med en fart av $dL/dt = 6$ fot pr. sekund.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.9

28 I figuren under har vi tegnet grafen til funksjonene x^2 og $\cos x$ i samme koordinatsystem. Vi ser herfra at ligningen $x^2 = \cos x$ har to løsninger i nærheten av $x = \pm 0.8$.



For å bruke Newton's metode skriver vi ligningen som $x^2 - \cos x = 0$ og ser på funksjonen $f(x) = x^2 - \cos x$. Denne har derivert $f'(x) = 2x + \sin x$. Newton's metode blir derfor for denne ligningen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \cos x_n}{2x_n + \sin x_n}.$$

Vi velger først $x_0 = -0.8$, og finner

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.8 - \frac{(-0.8)^2 - \cos(-0.8)}{2(-0.8) + \sin(-0.8)} \approx -0.82447 \\ x_2 &\approx -0.82413 \\ x_3 &\approx -0.82413. \end{aligned}$$

Dersom vi starter med $x_0 = 0.8$ finner vi tilsvarende $x_1 = 0.82447$, $x_2 = 0.82413$ og $x_3 = 0.82413$. Løsningene av ligningen er altså $x = \pm 0.8241$ gitt med fire desimalers nøyaktighet.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 3.MP

100 Vi antar at flyene ikke varierer flyhøyden sin. La α og β være avstanden fra flyplassen til henholdsvis fly A og B målt langs bakken. Da er avstanden mellom flyene målt langs bakken

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Den faktiske avstanden mellom flyene blir

$$D = \sqrt{\delta^2 + (3-2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}.$$

Dersom vi deriverer med hensyn på tiden t finner vi

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + 2\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} - \alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right).$$

Vi kjenner $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -500$ og $\frac{\mathrm{d}D}{dt} = -600$, slik at

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2^2+2^2+1}\cdot(-600) - 2\cdot(-500)\right) = -400.$$

Følgelig holder fly B hastigheten 400 mi/h.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.2

32 Vi skal bruke lineær approksimasjon til å finne en tilnærmet verdi av $\sin 32°$. La $f(x) = \sin x$. Ligning (6) gir da

$$\sin x = f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) = \sin a + (x-a)\cos a.$$

Merk at x og a er i *radianer* (ellers gjelder ikke derivasjonen)! Vi har $x = 32° = 32\pi/180$ og velger $a = 30° = \pi/6$:

$$\sin 32° = \sin\frac{32\pi}{180} \approx \sin\frac{\pi}{6} + (\cos\pi/6)\cdot\frac{2\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{90} \approx 0{,}5302.$$

(Kalkulatoren gir verdien 0,5299.)

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.3

44 Vi vil vise at $\sin x = 3x - 1$ har nøyaktig en løsning i intervallet $[-1, 1]$. Dette tilsvarer at $\sin x - 3x + 1 = 0$ har det samme. La $f(x) = \sin x - 3x + 1$. Da er $f'(x) = \cos x - 3$. Siden $-1 \le \cos x \le 1$ for alle x er $f'(x) \le 2 < 0$ slik at $f(x)$ er strengt avtagende. Det betyr at $f(x) = 0$ for *høyst* en x. Siden $f(-1) = \sin(-1) + 4 > 0$ og $f(1) = \sin 1 - 2 < 0$ følger det fra skjæringssetningen at det finnes *minst* en $x \in [-1, 1]$ slik at $f(x) = 0$, og derfor finnes *nøyaktig* en slik x.

45 La $f(t)$ betegne kilometerstanden ved tiden t. Tiden regnes i timer og normaliseres slik at $t = 0$ klokken 3:00 PM. I følge middelverdisetningen eksisterer det da et tidspunkt t_0 mellom 3:00 PM og 3:18 PM slik at

$$f'(t_0) = \frac{f(\frac{18}{60}) - f(0)}{\frac{18}{60} - 0} = \frac{8100 - 8075}{\frac{18}{60}} = \frac{25\cdot 60}{18} \approx 83.3.$$

Siden $f'(t)$ er hastigheten til bilen bryter den fartsgrensen.

62

a) Vi vil vise at $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ for alle $x > 0$. La $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$. Da er $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$. Fra oppgave 61 vet vi at $f'(x) > 0$ for alle $x > 0$. Siden $f(0) = \sin 0 - 0 + \frac{1}{6}0^3 = 0$ følger det at $f(x) > 0$ for alle $x > 0$. Dette er det samme som at $\sin x > x - \frac{1}{6}$ for alle $x > 0$.

b) Vi vil beregne $\sin 5°$ med tre desimalers nøyaktighet. Vi vet at for $x > 0$ er

$$\begin{aligned} \sin x &< x, && \text{(Example 9)} \\ \sin x &> x - \tfrac{1}{6}x^3. && \text{(Oppgave a))} \end{aligned}$$

$5°$ er $\frac{5}{180}\pi \approx 0.08727$ radianer. Følgelig ligger $\sin 5°$ i intervallet $(0.08716, 0.08727)$. Med tre desimalers nøyaktighet er derfor $\sin 5° = 0.087$.

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

$\boxed{14}$ Vi skal vise at grafen til ligningen $x^3 + y^3 = xy - 1$ ikke har horisontal tangent i noen punkter. Ved implisitt derivasjon med hensyn på x finner vi

$$3x^2 + 3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Vi setter inn at $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, og får sammenhengen $3x^2 = y$. Setter vi inn dette i den opprinnelige ligningen finner vi

$$\begin{aligned} x^3 + (3x^2)^3 &= x \cdot 3x^2 - 1 \\ x^3 + 27x^6 &= 3x^3 - 1 \\ 27(x^3)^2 - 2x^3 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

og videre

$$x^3 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 27 \cdot 1}}{2 \cdot 27} = \frac{1 \pm \sqrt{-26}}{27}.$$

Det betyr at ingen punkter på grafen har $y = 3x^2$, og derfor heller ingen horisontal tangent.