Løsningsforslag - Øving 5

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.7

54 Substitusjonen $u = \sqrt{x}$, $du = dx/(2\sqrt{x})$, gir

$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2\sin u\cos u\,du = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2u\,du$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2u\right]_{\pi/2}^{\pi} = -1.$$

62 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 d\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

Substitusjonen $u = \sin x$ gir $du = \cos x\,dx$. Videre er $u = 0$ når $x = 0$ og $u = 1$ når $x = \pi/2$.

$$I = \int_0^1 (1-u^2)du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

69 Integralet er 0 fordi integranden er en kontinuerlig, odde funksjon på integrasjonsintervallet som er symmetrisk om origo.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.8

10 Området er begrenset av kurvene $y = f(x) = x$ og $y = g(x) = x^2 - 3x$. Kurvene skjærer hverandre for $x = x^2 - 3x$, $x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$, dvs. for $x = 0$ og for $x = 4$. Arealet er da

$$A = \int_0^4 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^4 [x - (x^2 - 3x)]\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \tfrac{32}{3}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.9

16 Når vi deler intervallet $[0,1]$ i 4 like deler (regulær partisjon), får vi delepunktene

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \tfrac{1}{4}, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{3}{4}, \quad x_4 = 1$$

med funksjonsverdier $y_0 = \sqrt{1+0} = 1$, $y_1 = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $y_2 = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, $y_3 = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$, $y_4 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ og $\Delta x = \frac{1}{4}$. Trapesmetoden gir derfor

$$I \approx T_4 = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{2}) = 1.2182.$$

Simpsons metode gir

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{1}{12}(1 + 2\sqrt{5} + \sqrt{6} + 2\sqrt{7} + \sqrt{2}) = 1.2189.$$

Fundamentalsetningen for integralregningen gir

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1) = 1.21895142.$$

28 En tilnærming til $\ln 2$ beregnes ved Simpsons formel anvendt på integralet

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Hvor stor må n være for at feilen i S_n skal bli maksimalt $5 \cdot 10^{-6}$?

Fra teorem 2 i boka har vi feilestimatet

$$|ES_n| \le \frac{K_4(2-1)^5}{180n^4} = \frac{K_4}{180n^4},$$

der K_4 er en øvre skranke for $|f^{(4)}(x)|$ på intervallet $[1,2]$ (med $f(x) = 1/x$). Fra eksempel 7 i boka vet vi at vi kan velge $K_4 = 24$. Kombinerer vi dette med kravet om at $|ES_n| \le 5 \cdot 10^{-6}$, får vi

$$|ES_n| \le \frac{2}{15n^4} \le 5 \cdot 10^{-6} \;\Rightarrow\; n \ge 12{,}8.$$

Siden n må være et partall, betyr dette at vi må ha $n \ge 14$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.MP

74 La

$$F(u) = \int_a^u \phi(t)\,dt.$$

Ifølge fundamentalteoremet for integralregningen er da $F'(u) = \phi(u)$.
Siden $G(x) = F\big(h(x)\big)$ får vi, ved kjerneregelen:

$$G'(x) = F'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = \phi\big(h(x)\big) \cdot h'(x).$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.8

18

$$\int_0^\infty e^{-(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-(x+1)}\Big]_0^b = \frac{1}{e}.$$

46 Vi deler først opp integralet. (Denne oppdelingen er ikke strengt nødvendig når $k \le 0$, men den skader heller ikke.)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\ln x)^k}dx = I_1 + I_2 \quad \text{der} \quad I_1 = \int_1^e \frac{1}{x(\ln x)^k}dx \quad \text{og} \quad I_2 = \int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^k}dx$$

Substitusjonen $u = \ln x$ gir $du = \frac{1}{x}\,dx$, slik at for $k \ne 1$ gjelder

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^k}dx = \int u^{-k}\,du = \frac{u^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{(\ln x)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

mens for $k = 1$ er

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^k}dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C = \ln(\ln x) + C.$$

For $k > 1$ er $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{(\ln x)^{-k+1}}{-k+1} = -\infty$, så I_1 divergerer.

For $k < 1$ er $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^{-k+1}}{-k+1} = \infty$, så I_2 divergerer.

For $k = 1$ divergerer både I_1 og I_2.

Integralet konvergerer derfor ikke for noen reelle verdier av k.