

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.5

- 18 (a) Differentialligningen $\frac{dI}{dx} = -1,4I$ har løsning $I(x) = Ce^{-1,4x}$ (bruk teorem 1 side 459, eller integrer direkte som for enhver annen separabel ligning: $\int I^{-1} dI = -1,4 \int dx$ gir $\ln I = -1,4x + A$, etc). Her er $C = I(0) = I_0$. Vi skal løse ligningen $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Det gir

$$I_0 e^{-1,4x} = \frac{1}{2}I_0 \Rightarrow e^{-1,4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{1,4} \approx 0,495.$$

- (b) Lysintensiteten ved 10 meter er

$$I(10) = I_0 e^{-1,4 \cdot 10} \approx 0,000000832I_0 = \frac{I_0}{1202600}$$

- (c) Må løse $I(x) = 0,01 I_0$. Vi får da

$$I_0 e^{-1,4x} = 0,01I_0 \Rightarrow e^{-1,4x} = 0,01 \Rightarrow x = \frac{\ln 0,01}{-1,4} \approx 3,29 \text{ meter.}$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.6

- 16 La $x(t)$ være kg salt i tanken ved tiden t (målt i sekunder). Får oppgitt at $x(0) = 50$ kg. Vi antar at saltet hele tiden er jevnt fordelt i vannet. Rent vann renner inn med rate r L/s, så vi får ikke inn noe mer salt i tanken. Saltholdig vann med konsentrasjon $\frac{x(t)}{1000}$ kg/L ved tiden t renner ut med samme rate r m/s. Dermed avtar saltkonsentrasjonen med $\frac{r}{1000}x(t)$ kg/s, og differentialligningen vi skal løse er

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{1000}x(t)$$

Teorem 1 side 459 gir løsningen $x(t) = 50e^{-rt/1000}$. Vi skal finne hvor lang tid det tar før det er bare 10 kg salt igjen i tanken. Må da løse $x(t) = 10$. Det gir

$$\frac{1}{5} = e^{-rt/1000}; t = -\frac{1000 \cdot \ln \frac{1}{5}}{-r} \approx \frac{1609}{r} \text{ sekunder.}$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.2

26

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2n}{\ln 3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2 + \ln n}{\ln 3 + \ln n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\ln 2}{\ln n} + 1}{\frac{\ln 3}{\ln n} + 1} \right) = \left(\frac{0 + 1}{0 + 1} \right) = \underline{\underline{1}}$$

56 Gitt Fibonaccifølgen $\{F_n\}$ fra eksempel 2. Legg først merke til at

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ impliserer at } \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Dermed, med $a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ så er $a_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

Hvis vi nå antar $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ eksisterer, så ved å la $n \rightarrow +\infty$ i siste ligning får vi

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = 1 + \frac{1}{\tau}.$$

Dermed har vi

$$\tau^2 = \tau + 1 \Rightarrow \tau^2 - \tau - 1 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

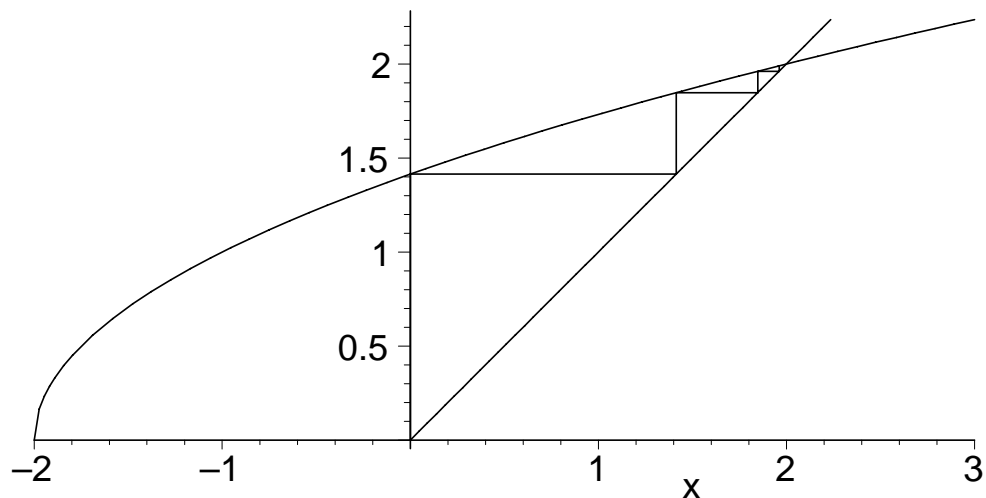
Siden $a_n > 0$ for alle $n \geq 1$, så kan ikke τ være negativ. Derfor er $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

58 Tilsvarende eksempel 13 har vi at

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

kan tolkes som $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, der $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er gitt i oppgaven. Vi vil bruke komplettheten av de reelle tall (Bounded Monotonic Sequence Property i E & P) som sier at enhver begrenset, monoton følge konvergerer. Første utfordring blir dermed å vise at $\{a_n\}_1^{\infty}$ er monoton og begrenset. Til det kan vi bruke induksjonsbevis 2 ganger.

Ved å prøve seg litt frem (kalkulator) finner vi at 2 er et fornuftig anslag på øvre grense. En figur viser det kanskje enda tydeligere. Det vil vi nå vise ved induksjon, dvs vi vil vise $a_n < 2$ for alle $n \geq 1$.



Figur til oppgave 11.2.58: Grafen til $y = \sqrt{2+x}$, sammen med diagonalen $y = x$. Trappekurven antyder hvordan man finner følgen $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots$ grafisk: Gitt x_n går man vertikalt til grafen, så horisontalt til diagonalen for å finne x_{n+1} .

$n=1$ er OK siden $a_1 = \sqrt{2} < 2$

Anta nå at hypotesen stemmer for $n=k$, dvs vi antar at $a_k < 2$. Da har vi

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

og vi har dermed vist $a_n < 2$ for alle $n \geq 1$ ved induksjon.

Det neste vi trenger er at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende. Dette vil vi også bruke induksjon for å vise. Induksjonshypotesen i dette tilfelle er

$$a_n < a_{n+1} \text{ for alle } n \geq 1.$$

$n=1$: Hypotesen sier da $a_1 < a_2$, dvs $\sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Dette stemmer.

Anta nå at hypotesen stemmer for $n=k$, dvs vi antar $a_k < a_{k+1}$. Må vise at $a_{k+1} < a_{k+2}$.

$$a_{k+2} = \sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{2 + a_k} = a_{k+1}$$

der ulikheten kommer fra antagelsen $a_k < a_{k+1}$. Dermed har vi også vist at følgen er monoton.

Tilslutt gjenstår det å finne grenseverdien. Det lar seg nå gjøre ved et enkelt triks siden vi vet den eksisterer. Kall grensen for M , dvs $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$. Da vil også $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = M$, så

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + M}$$

Kvadrering gir $M^2 - M - 2 = 0$, og løsning av 2. gradsligning gir $M=2$ (Den negative løsningen $M = -1$ gir ikke mening her fordi det er opplagt at $M > 0$). Dermed har vi vist at

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 2$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.3

- 2 Dette er en geometrisk rekke der forholdstallet er $r = e^{-1} \approx 0.368$. Teorem 1 på s. 637 i EP gir da at

$$\sum_0^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}$$

- 10 Vi har rekka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

der a_n er gjeve ved:

$$a_n = n^{-\frac{1}{n}}$$

Vi finn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ for å sjekke om $a_n \rightarrow 0$. Om a_n ikkje går mot 0, kan ikkje summen konvergere.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{n}} \\ \ln \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln n}{n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

Her nytta vi L'Hôpital sin regel, og vi ser at rekka divergerer ($a_n \not\rightarrow 0$)

52 For rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$$

får vi partialsummer som “teleskoperer”:

$$\begin{aligned} S_n &= [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + [\ln 4 - \ln 3] + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1). \end{aligned}$$

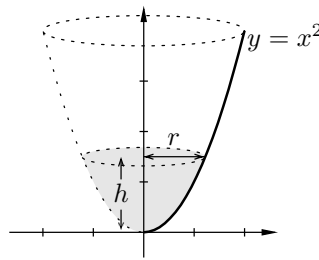
Det følger av dette at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty,$$

så rekka divergerer.

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

98 Vanntanken på figuren fremkommer ved at kurven $y = x^2$ for $0 \leq x \leq 2$ dreies om y -aksen.



- a) Vi regner ut volumet ved å integrere over sirkelskiver med areal πr^2 hvor $r = x = \sqrt{y}$. Se figuren. Da blir

$$V(h) = \pi \int_0^h (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^h y dy = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^h = \frac{\pi h^2}{2}.$$

- b) Vi bruker nå kjerneregelen og finner

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow 1 = \pi h \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h}$$

Ved å sette inn $h = 1$ finner vi at vannhøyden stiger med $\frac{1}{\pi}$ meter pr. time i det øyeblikket vannhøyden er 1 meter.

- c) Fra oppgaveteksten finner vi at

$$\frac{dV}{dt} = -\tilde{k}\sqrt{h},$$

hvor \tilde{k} er en positiv proporsjonalitetskonstant. Vi bruker kjerneregelen på samme måte som over, og kan skrive opp

$$\pi h \frac{dh}{dt} = -\tilde{k}\sqrt{h} \Leftrightarrow \sqrt{h} \frac{dh}{dt} = -k.$$

Konstanten $k = \frac{1}{\pi}\tilde{k}$.

d) Vi løser først differensialligningen over. Det er en separabel ligning, slik at

$$\int \sqrt{h} \, dh = -k \int dt + \tilde{C} \Leftrightarrow \frac{2}{3}h\sqrt{h} = -kt + \tilde{C} \Leftrightarrow h(t) = \left(-\frac{3}{2}kt + C\right)^{\frac{2}{3}}.$$

For å bestemme konstantene C og k bruker vi initialbetingelsene $h(0) = 2$ og $h(3) = 1$. $h(0) = C^{\frac{2}{3}} = 2$ gir at $C = 2\sqrt{2}$. Videre er $h(3) = \left(2\sqrt{2} - \frac{9}{2}k\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ slik at $k = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}$. Vannhøyden er derfor gitt av ligningen

$$h(t) = \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}-1}{3}t\right)^{\frac{2}{3}}.$$

For å finne hvor lang tid tanken bruker på å tømmes løser vi ligningen $h(t) = 0$.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}t \Leftrightarrow t = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \approx 4.64.$$

Det vil si at tanken bruker ca. 4.64 timer på å tømmes.