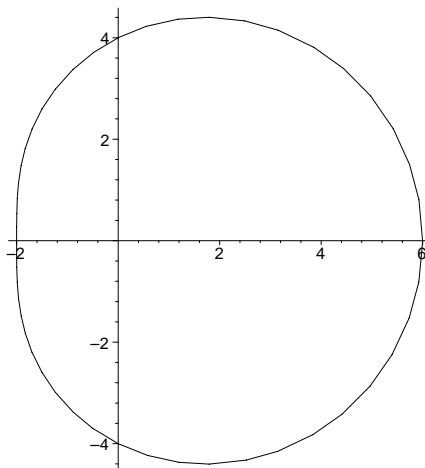
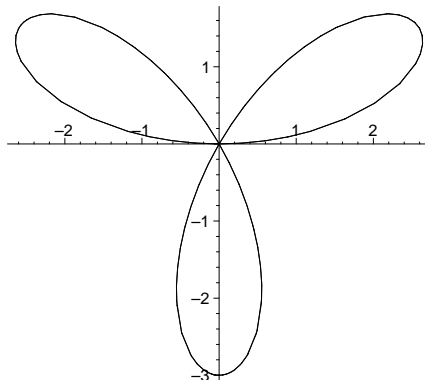


Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.2

44 $r = 4 + 2 \cos \theta$ er symmetrisk om x -aksen ($\cos(-\theta) = \cos \theta$).



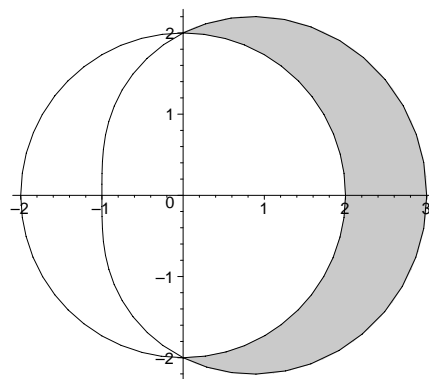
48 $r = 3 \sin 3\theta$ er symmetrisk om y -aksen ($\sin 3(\pi - \theta) = \sin 3\theta$). (I tillegg har man en treveis rotasjonssymmetri som følger av $\sin 3(\theta + 2\pi/3) = \sin 3\theta$.)



Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.3

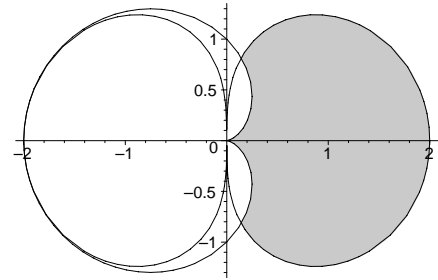
28 Området innenfor $r = 2 + \cos \theta$ og utenfor $r = 2$ begrenses av skjæringspunktene gitt ved $\cos \theta = 0$, dvs. $\theta = \pm\pi/2$. Ved symmetri blir arealet

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} ((2 + \cos \theta)^2 - 2^2) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \left[4 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi/4 + 4. \end{aligned}$$



- 34 Vinkelen θ_0 til skjæringspunktet mellom kurvene i første kvadrant er bestemt av

$$\begin{aligned}(1 - \cos \theta_0)^2 &= 4 \cos \theta_0 \\ \cos^2 \theta_0 - 6 \cos \theta_0 + 1 &= 0 \\ \cos \theta_0 &= 3 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$



(I siste linje kaster vi bort den andre løsningen $\cos \theta_0 = 3 + 2\sqrt{2}$ fordi $\cos \theta_0 \leq 1$.) Vi får altså

$$\begin{aligned}A &= 2 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{2}(4 \cos \theta - (1 - \cos \theta)^2) d\theta = \int_0^{\theta_0} (6 \cos \theta - 1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\theta_0} (6 \cos \theta - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta) d\theta = 6 \sin \theta_0 - \frac{3}{2}\theta_0 - \frac{1}{4} \sin 2\theta_0.\end{aligned}$$

Om man vil, kan man også bruke $\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}$ og $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 2\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0} \cos \theta_0$ og til sist ende opp med

$$A = 12\sqrt{3\sqrt{2} - 4} - \frac{3}{2} \arccos(3 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 4)^{3/2} \quad (!)$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.4

- 18 Vi vil studere kurven

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

i punktet $t = \frac{\pi}{4}$.

- a) For å finne tangenten til kurven må vi først bestemme $\frac{dy}{dx}$. Vi bruker kjerneregelen som gir oss

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Dermed blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t.$$

I punktet $t = \frac{\pi}{4}$ er da $\frac{dy}{dx} = -1$, mens

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2} \quad \text{og} \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Tangentlinjen er da gitt ved

$$y - \frac{1}{4}\sqrt{2} = -1\left(x - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

- b) Vi vil bestemme krumningen ved å regne ut $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ved å bruke kjerneregelen en gang til finner vi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t}$$

Evaluert i $t = \frac{\pi}{4}$ blir da

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^4 \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}}.$$

Siden dette er positivt, er kurven konvex opp (konveks) i dette punktet.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.5

28 Bruker formelen

$$A_y = 2\pi \int_0^{2\pi} x \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a \cos t)a \, dt = 4a\pi(b\pi) = 4ab\pi^2.$$

Her har vi brukt at $ds = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = a \, dt$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.MP

54 Vi vil finne buelengden av den parametriske kurven

$$x = \ln(\cos t), \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Buelengden vil være gitt ved $s = \int ds$ hvor

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 + 1^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{1 - u^2} du, \end{aligned}$$

hvor vi i siste overgang brukte substitusjonen $u = \sin t$. Ved delbrøkkoppspalting finner vi videre

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} = \frac{A(1 + u) + B(1 - u)}{1 - u^2}.$$

Ved å sammenligne koeffisienter får vi da at $A + B = 1$, $A - B = 0$, eller tilsvarende $A = B = \frac{1}{2}$. Dermed blir

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{1 - u} du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{1 + u} du = \left[-\frac{1}{2} \ln |1 - u| + \frac{1}{2} \ln |1 + u| \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + u}{1 - u} \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

52 Vi benytter formelen $V = \pi \int_c^d x^2 dy$.

For å være sikker på at det er lov å bruke denne integralformelen, trenger vi å vite at den gitte kurven virkelig kan beskrives ved at x er en funksjon av y . Nedenfor gjør vi dette ved eksplisitt regning, men vi kunne også merket oss at $y = a \sin^{1/n} \theta \cdot \sin \theta = a \sin^{(1+n)/n} \theta$, som er en voksende funksjon av θ i området $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Så vi kan omvende den funksjonen og uttrykke θ , og dermed x , ved y .

Fra ligningen $r = a(\sin \theta)^{1/n}$ får man

$$r^n = a^n \sin \theta = a^n \frac{y}{r},$$

og dermed

$$(x^2 + y^2)^{(n+1)/2} = a^n y, \quad x^2 = a^{2n/(n+1)} y^{2/(n+1)} - y^2.$$

Dette gir

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_0^a (a^{2n/(n+1)} y^{2/(n+1)} - y^2) dy \\ &= \pi \left[a^{2n/(n+1)} \frac{n+1}{n+3} y^{(n+3)/(n+1)} - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^a = \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{n}{n+3}. \end{aligned}$$

Vi finner $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{2}{3} \pi a^3$. (Dette er volumet av en halvkule, som er rimelig fordi $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \theta)^{1/n} = 1$ når $0 < \theta \leq \pi/2$.)

Alternativt kan det virke fornuftig å bruke θ som integrasjonsvariabel: Vi finner

$$dy = \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \right) d\theta = a \left(\frac{1}{n} \sin^{(1-n)/n} \theta \cos \theta + \sin^{1/n} \theta \cos \theta \right) d\theta$$

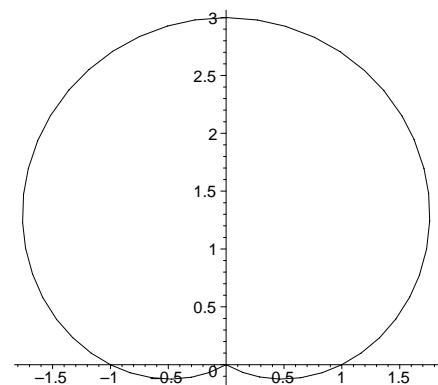
slik at

$$\pi \int_0^a x^2 dy = \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^{2/n} \theta \cos^2 \theta \left(\frac{1}{n} \sin^{(1-n)/n} \theta \cos \theta + \sin^{1/n} \theta \cos \theta \right) d\theta$$

hvor man så setter inn $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, og trekker den felles faktoren $\cos \theta$ ut av parentesen, hvoretter $u = \sin \theta$ skulle være en effektiv substitusjon. Dette leder da også frem til målet, men ikke like raskt som løsningen ovenfor.

53

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 2 \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 4 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 4 \sin \theta + 2(1 - \cos 2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} [3\theta - 4 \cos \theta - \sin 2\theta]_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\ &= \frac{7}{4} \pi + \frac{1}{4} \pi - 2 \cos \frac{7}{6} \pi + 2 \cos(-\frac{1}{6} \pi) - \frac{1}{2} \sin \frac{7}{3} \pi + \sin(-\frac{1}{3} \pi) \\ &= 2\pi + 4 \cos \frac{1}{6} \pi - \sin \frac{1}{3} \pi \\ &= 2\pi + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \sqrt{3} = 2\pi + \frac{3}{2} \sqrt{3}. \end{aligned}$$



54 Vi har $A = \int_a^b y dx$ der

$$x = t^3, \quad y = 4 - t^2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

($a = x(0)$, $b = x(2)$.) Her blir $dx = 3t^2 dt$, så

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (4 - t^2) \cdot 3t^2 dt = \int_0^2 (12t^2 - 3t^4) dt \\ &= \left[4t^3 - \frac{3}{5}t^5 \right]_0^2 = 32 - \frac{3}{5}32 = \frac{64}{5}. \end{aligned}$$

Buelengden er gitt ved

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (-2t)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{9t^2 + 4} dt \end{aligned}$$

hvor vi substituerer inn $u = 9t^2 + 4$, $du = 18t dt$:

$$s = \frac{1}{18} \int_4^{40} \sqrt{u} du = \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^{40} = \frac{1}{27} (40^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{8}{27} (10^{3/2} - 1) \approx 9,07.$$