Separable differensialligninger

En differensialligning kalles separabel om den kan skrives på formen

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Den løses ved å integrere:

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Rettferdiggjøres slik

La $F' = f$ og $G' = g$. Da må

$$F'(y)\frac{dy}{dx} = G'(x).$$

Altså

$$\frac{d}{dx}\big(F(y)\big) = G'(x).$$

Da må

$$F(y) = G(x) + C.$$

Eksponensialfunksjoner

Eksponensialfunksjonen a^x skal være slik at

$$a^{x+v} = a^x a^v, \quad , a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

I tillegg vil vi gjerne at den skal være differensiabel. Da må

$$\frac{da^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - a^0)}{h}$$
$$= a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}}_{m} = ma^x.$$

(Dette var lurt)

Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = my$$

er en separabel differensialligning!
Vi vet alt om å løse slike:

$$\frac{dy}{y} = m\,dx$$

som vi integrerer og får $mx = \displaystyle\int \frac{dy}{y}$.

Logaritmer

Siden $a^0 = 1$ skal $y = 1$ når $x = 0$. Vi får

$$mx = \int_1^y \frac{dt}{t}.$$

Logaritmefunksjonen $\log_a$ er den omvendte funksjonen til a^x, så vi skal ha

$$\log_a = \frac{1}{m} \int_1^y \frac{dt}{t}.$$

Så alle logaritmefunksjoner er like, bortsett fra faktoren m.

Naturlig logaritme

$$\ln y = \int_1^y \frac{dt}{t}.$$

Ikke vanskelig å vise at $\ln$ er voksende og at

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Den omvendte funksjonen:

$$\exp x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

Regneregler

$$\exp(x+u) = \exp(x)\exp(u)$$

Dessuten blir

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

i hvert fall når x er rasjonal, så vi tar dette som en definisjon ellers.
Spesielt blir

$$\exp(x) = e^x \quad \text{der } e = \exp(1).$$