

LØSNINGSFORSLAG TIL SIF5005, 14. MAI, 2001

Oppgave 1. A: (vi). B: (ii)

Oppgave 2. Vi skal maksimere funksjonen $f(x, y, z) = xyz$ under tilhørende betingelsen

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Lagrange' multiplikatormetode gir ligningssystemet

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) \quad \text{og} \quad g(x, y, z) = 1.$$

Det vil si,

$$(1) \quad yz = \lambda \cdot \frac{2x}{a^2}$$

$$(2) \quad xz = \lambda \cdot \frac{2y}{b^2}$$

$$(3) \quad xy = \lambda \cdot \frac{2z}{c^2}$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Det er klart at maksimum må inntruffe i et punkt der $x \neq 0$, $y \neq 0$ og $z \neq 0$. Vi kan derfor multiplisere ligningene (1) - (3) med henholdsvis x , y og z . Det gir

$$xyz = \lambda \cdot \frac{2x^2}{a^2} = \lambda \cdot \frac{2y^2}{b^2} = \lambda \cdot \frac{2z^2}{c^2}$$

slik at $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$. Innsatt i (4) gir det 3 $\cdot \frac{x^2}{a^2} = 1$ slik at $x = \pm a/\sqrt{3}$, $y = \pm b/\sqrt{3}$ og $z = \pm c/\sqrt{3}$. Maksimum for $f(x, y, z)$ er derfor $\frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ (og minimum er $-\frac{abc}{3\sqrt{3}}$).

Oppgave 3. Ved kjernerregelen (kjederegelen) gjelder

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle \\ &= \langle 2, 1, -4 \rangle \cdot \frac{\langle 7, 5, 1 \rangle}{|\langle 7, 5, 1 \rangle|} \cdot 1000 \text{ }^\circ\text{C/h} = \frac{14 + 5 - 4}{\sqrt{49 + 25 + 1}} \cdot \frac{1000}{60} \text{ }^\circ\text{C/min} = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ }^\circ\text{C/min}. \end{aligned}$$

Oppgave 4. La $f(x, y, z) = xz^2 - yz + \cos xy$. Da er

$$\vec{N}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \langle z^2 - y \sin xy, -z - x \sin xy, 2xz - y \rangle$$

en normalvektor til S i punktet (x, y, z) . Spesielt er

$$\vec{N}(0, 0, 1) = \langle 1, -1, 0 \rangle.$$

2

Punktet $(0, 0, 1)$ ligger både på flaten S ($f(0, 0, 1) = 1$) og på den gitte kurven ($t = 1$). Tangentvektor til kurven i $(0, 0, 1)$ er $\vec{r}'(1)$ der $\vec{r}(t) = \langle \ln t, t \ln t, t \rangle$. Det vil si

$$\vec{r}'(1) = \left\langle \frac{1}{t}, \ln t + 1, 1 \right\rangle \Big|_{t=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle.$$

Siden $\vec{N}(0, 0, 1) \cdot \vec{r}'(1) = \langle 1, -1, 0 \rangle \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle = 0$, er $\vec{N}(0, 0, 1)$ en normalvektor til tangenten til kurven i $(0, 0, 1)$. Derfor ligger tangenten til kurven i normalplanet til flaten S .

Oppgave 5.

a). Kirkerommets volum

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq 18^2} \left(20 - \frac{x^2}{25} + \frac{y}{2} \right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{18} \left(20 - \frac{r^2 \cos^2 \theta}{25} + \frac{r \sin \theta}{2} \right) r dr d\theta = 5430.24\pi. \end{aligned}$$

b). La $f(x, y) = 20 - x^2/25 + y/2$, slik at taket til kirken er som en del av grafen til f . Da gir $|\nabla f(x, y)|$ den maksimale retningsderiverte i punktet (x, y) . Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left\langle -\frac{2x}{25}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |\nabla f(x, y)| &= \sqrt{\left(\frac{2x}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 20}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2.81} \end{aligned}$$

før $x^2 + y^2 \leq 400 = 20^2$. Siden $\tan 60^\circ = \sqrt{3} > \sqrt{2.81}$, er hellingen på taket alltid mindre enn 60° med horisontalplanet. Altså kan takbelegget benyttes.

Oppgave 6. Vi legger T inn i et koordinatsystem slik at z -aksen følger symmetriaksen i T og xy -planet ligger i skjøten mellom del A og B. Da kan T beskrives i sylinderkoordinater ved

$$-\sqrt{4-r^2} \leq z \leq 4-2r \quad \text{for } 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

med massetetthet

$$\delta(r, \theta, z) = \begin{cases} 1/3 & \text{for } z > 0, \\ 4/3 & \text{for } z < 0. \end{cases}$$

Massen til T er

$$m = \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 \right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{80\pi}{9}.$$

På grunn av symmetrien ligger tyngdepunktet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ til T på z -aksen. Det vil si, $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ og

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint_T z \cdot \delta \cdot dV = \frac{9}{80\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^0 z \cdot \frac{4}{3} \cdot r dz dr d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{4-2r} z \cdot \frac{1}{3} \cdot r dz dr d\theta \right\} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Avstanden mellom P og tyngdepunktet er derfor $4 + 2/5 = 22/5$.

Oppgave 7.

a).

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x + \cos yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-\arctan y) + \frac{\partial}{\partial z} \left(1 + \frac{z}{1+y^2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = 2.\end{aligned}$$

b). S er gitt ved $z = e^{1-x^2-y^2} - 1$ for $x^2 + y^2 \leq 1$. Sammen med flaten $S_B: z = 0$ for $x^2 + y^2 \leq 1$ danner den en enkel lukket flate. Ifølge divergensteoremet gjelder derfor

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_B} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dA = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

der T er området innenfor den lukkede flaten. Det vil si,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{e^{1-r^2}-1} 2 \cdot r dz dr d\theta - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -(1+0)dA \\ &= 2\pi \int_0^1 2r(e^{1-r^2} - 1) dr + (\text{areal av } S_B) = \pi(2e - 3).\end{aligned}$$

Oppgave 8. Flaten S har en rand som består av 4 glatte deler:

$$C_1 : x = t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_2 : x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$C_3 : x = 1 - t, \quad y = 0, \quad z = 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$C_4 : x = 0, \quad y = 0, \quad z = 2\pi - t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

La $P(x, y, z) = z$, $Q(x, y, z) = x^4 y$ og $R(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2$ betegne koordinatene til \vec{G} . Ifølge Stokes' teorem gjelder

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{curl} \vec{G} \cdot \vec{n} dS &= \int_{C_1} \vec{G} \cdot \vec{T} ds + \int_{C_2} \vec{G} \cdot \vec{T} ds + \int_{C_3} \vec{G} \cdot \vec{T} ds + \int_{C_4} \vec{G} \cdot \vec{T} ds \\ &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx + Q dy + R dz + \int_{C_3} P dx + \int_{C_4} R dz \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^{2\pi} \{\theta(-\sin \theta) + \cos^4 \theta \sin \theta \cos \theta + 0\} d\theta + \int_0^1 2\pi(-dt) + \int_0^{2\pi} 1(-dt) \\ &= \left[-\sin \theta + \theta \cos \theta - \frac{\cos^6 \theta}{6} \right]_0^{2\pi} - 2\pi - 2\pi = -2\pi.\end{aligned}$$