Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelliste

Fagleg kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 7359 3525
Lisa Lorentzen 7359 3548
Vigdis Petersen 7359 3523

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

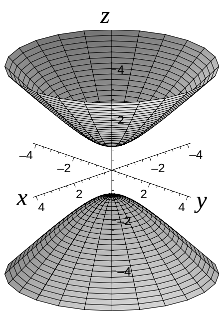
Nynorsk
Måndag 14. mai 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemiddel: B2 – Typegodkjend kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

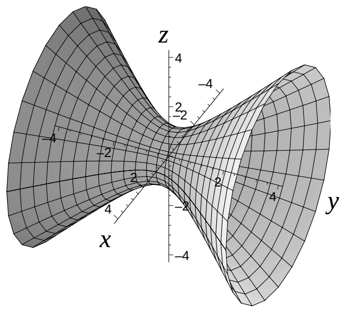
Sensuren fell i veke 25.

Oppgåve 1 skal svarast på utan grunngjeving. Alle andre svar skal grunngjevast, og det må vera med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går klart fram av svaret. Svar som er tekne rett frå kalkulator blir ikkje godtekne som fullgode svar.

Oppgåve 1



A



B

Kva for ei av dei 6 likningane nedanfor har grafen som vist i figur A?
Kva for ei av dei 6 likningane nedanfor har grafen som vist i figur B?

(i)	$x^2+y^2-z^2=1$	(iv)	$x^2-y^2-z^2=1$
(ii)	$x^2-y^2+z^2=1$	(v)	$-x^2+y^2-z^2=1$
(iii)	$-x^2+y^2+z^2=1$	(vi)	$-x^2-y^2+z^2=1$

Oppgåve 2 Bruk Lagranges metode til å finne største moglege verdi av funksjonen $f(x,y,z) = xyz$ når (x,y,z) skal ligge på ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Her er a, b og c gjevne positive konstantar.

Oppgåve 3 Eit fly reiser gjennom øvre luftlag der temperaturen i (x,y,z) er $T(x,y,z)$. Finn temperaturendringa per minutt rundt flyet ved eit tidspunkt der

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -4 \qquad \text{målt i °C/km},$$

når farten til flyet er 1000 km/h og det flyr i retninga $\langle 7, 5, 1 \rangle$.

Oppgåve 4 Finn ein normalvektor til flata

$$S: \quad xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

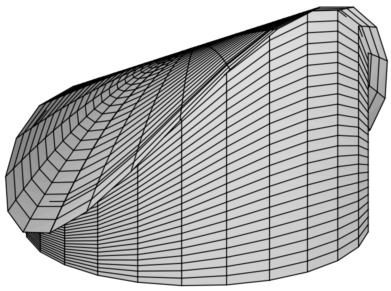
i punktet $(0,0,1)$. Vis at tangenten til kurva

$$x = \ln t, \quad y = t \ln t, \quad z = t \qquad \text{for } 0 < t < \infty$$

i punktet $(0,0,1)$ ligg i tangentplanet til S i punktet $(0,0,1)$.

Oppgåve 5 Ei planlagd kyrkje har form som ein sirkulær sylinder $x^2 + y^2 = 18^2$ som står på xy–planet med tak

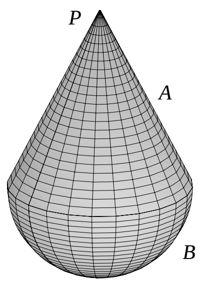
$$z = 20 - \frac{x^2}{25} + \frac{y}{2} \qquad \text{for } x^2 + y^2 \le 400.$$



a) Rekn ut volumet V til kyrkjerommet.

b) Valet av takbelegg kjem an på kor bratt taket er. Kan det brukast eit belegg som tåler ei helling på maksimalt $60\,°$ med horisontalplanet?

Oppgåve 6 Ein lekam T er sett saman av to kompakte delar A og B. Del A er ei rett sirkulær kjegle med høgda 4, grunnflateradien 2 og massetettleiken $1/3$. Del B er ei halvkule med radien 2 og massetettleiken $4/3$. Delane er festa saman som vist på figuren. La P stå for toppunktet i spissen av A. Finn avstanden mellom P og tyngdepunktet til T.



Oppgåve 7 Vi har vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (2x + \cos yz)\mathbf{i} - \arctan y\,\mathbf{j} + \left(1 + \frac{z}{1+y^2}\right)\mathbf{k}.$$

a) Rekn ut $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

b) Bestem fluksen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

opp gjennom den delen S av flata $z = e^{1-x^2-y^2} - 1$ der $z \geq 0$.

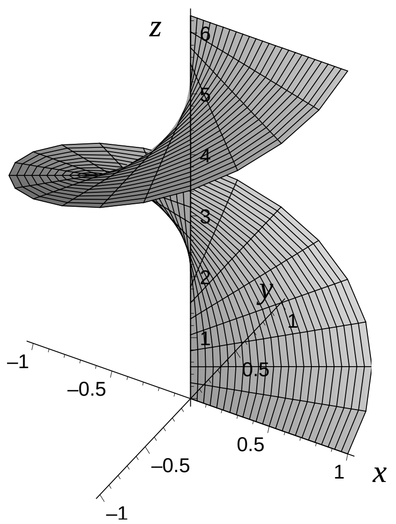
Oppgåve 8 Vi har vektorfeltet

$$\mathbf{G} = z\mathbf{i} + x^4 y\,\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)\mathbf{k}.$$

Vidare er S den delen av skrueflata gjeven i sylinderkoordinatar ved $z = \theta$ der $0 \leq r \leq 1$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$, og vist på figuren nedanfor. Bruk Stokes' teorem til å rekne ut

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

der normalvektoren $\mathbf{n}$ på S peikar oppover.



FORMELLISTE

Andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \;\; B = f_{xy}, \;\; C = f_{yy}$$

Koordinatsystem:

Sylinderkoordinatar $x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$
$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinatar $x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Massesenter for ein lekam i rommet:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\,dm, \qquad dm = \delta\,dV$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet: $$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem: $$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

der $\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$